Fisica Matematica I

Secondo Esonero, Venerdì 30-05-24

Cognome......................... Nome.........................

Avete 2:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

Si consideri un disco D nel piano verticale z, x con centro O nell'origine, raggio 2 e densità uno. Si assuma inoltre che un punto materiale A di massa 1 sia fissato al disco ad una distanza 1 dall'origine mentre un altro punto materiale B, di massa 2, è vincolato a muoversi sulla retta contente il segmento $\overline{OA}$ ed è connesso al centro del disco da una molla di massa nulla, lunghezza a riposo nulla e constante $k > 0$.

1. Si calcoli la matrice (il tensore) di inerzia del corpo rigido formato da D e A.
2. Si scrivano la Lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
3. Si studino le piccole oscillazioni attorno agli eventuali punti di equilibrio stabile. Si dica se esistono dei valori di k per cui tutti i moti di piccola oscillazione sono periodici.

Soluzione

1. Consideriamo il caso in cui le coordinate di A sono $(1,0,0)$. Allora la formula per il tensore di inerzia è
$$I = \begin{pmatrix} \int_D y^2 + z^2 dxdz & 0 & -\int_D xzdxdz \\ 0 & \int_D x^2 + z^2 dxdz + 1 & 0 \\ -\int_D xzdxdz & 0 & \int_D y^2 + x^2 dxdz + 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4\pi & 0 & 0 \\ 0 & 8\pi + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4\pi + 1 \end{pmatrix}$$

2. Scegliamo come coordinate Lagrangiane l'angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ del segmento OA con l'asse delle x contato in senso antiorario e la distanza segnata $r \in \mathbb{R}$ del punto B da O. Allora le coordinate di B sono $r(\cos\theta, 0, \sin\theta)$. L' energia cinetica è
$$T = \frac{1}{2}\langle \omega, I\omega \rangle + \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2.$$
Ma $\omega = \dot{\theta}(0,1,0)$, quindi
$$T = (4\pi + 1/2 + r^2)\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2.$$
D'altro canto l'energia potenziale è
$$V = g\left(\int_D zdxdz + \sin\theta + 2r\sin\theta\right) + \frac{k}{2}r^2$$
Poichè l'energia potenziale è definita a meno di una costante possiamo trascurare l'integrale. Dunque la Lagrangiana è
$$\mathcal{L} = (4\pi + 1/2 + r^2)\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 - g\,(1 + 2r)\sin\theta - \frac{k}{2}r^2$$

3. I punti di equilibrio sono gli zeri di ∇V, ovvero
$$g(1 + 2r)\cos\theta = 0$$
$$2g\sin\theta = -kr$$
che ha come soluzioni $r = -1/2$ e $\sin\theta = \frac{k}{4g}$, a patto che $2g < k$, e $r = \mp\frac{2g}{k}$ e $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Per vedere i minimi dobbiamo guardare la derivata seconda
$$D^2V = \begin{pmatrix} -g(1 + 2r)\sin\theta & 2g\cos\theta \\ 2g\cos\theta & k \end{pmatrix}.$$
Se $r = -\frac{1}{2}$ si vede che c'è sempre un autovalore negativo. Per $(\theta, r) = (-\pi/2, \frac{2g}{k})$ il punto di equilibrio è stabile, mentre per $(\theta, r) = (\pi/2, -\frac{2g}{k})$ il punto di equilibrio è stabile solo se $2g > k$.

Analizziamo il caso $(\theta, r) = (-\pi/2, \frac{2g}{k})$. La Lagrangiana di piccole oscillazioni è
$$\mathcal{L}_p = (4\pi + 1/2 + \frac{4g^2}{k^2})\dot{\theta}^2 - \dot{r}^2 - \frac{g}{2}\left(1 + \frac{4g}{k}\right)\theta^2 - \frac{k}{2}r^2$$
quindi i modi normali sono $(1,0)$ e $(0,1)$ e le rispettive frequenze sono $\omega_1^2 = \frac{g\left(1+\frac{4g}{k}\right)}{2(4\pi+1/2+\frac{4g^2}{k^2})}$ e $\omega_2^2 = \frac{k}{2}$. Dunque i moti sono periodici di periodo $\frac{2q\pi}{\omega_1}$, $q \in \mathbb{N}$, se esiste $p \in \mathbb{N}$ tale che
$$p\omega_1 = q\omega_2$$

ovvero

$$p^2 \frac{g\left(1+\frac{4g}{k}\right)}{2(4\pi+1/2+\frac{4g^2}{k^2})} = q^2\frac{k}{2}$$

quindi

$$p^2 g(k+4g) = q^2[(4\pi+1)k^2+4g^2]$$

ovvero

$$k = \frac{p^2 g \pm \sqrt{p^4 g^2 - 4q^2(\pi+1)(4g^2q^2-4gp^2)}}{2q^2(\pi+1)} > 0$$

per tutti i q, p tali che

$$q^2 \leqslant \frac{p^4+4(\pi+1)qp^2}{4(\pi+1)g^2}.$$

L'analisi dell'altro punto di equilibrio stabile (quanto $2g > k$) è simile.