

Fisica Matematica I

Primo esonero, 18-04-24

Cognome.....	Nome.....
--------------	-----------

Avete 2:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 15 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Supponiamo di vivere in una terra piatta e in assenza di atmosfera. Dato un corpo di massa m sulla superficie terrestre con velocità $v = (\cos \theta, 0, \sin \theta)$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, si dica per quale θ il corpo raggiunge il suolo nel punto più lontano possibile. Si trovi una equazione per il tempo in cui il corpo torna a terra nel caso di un attrito lineare (che modella, non benissimo, la presenza di una atmosfera).

Domanda facoltativa: Si dica se per piccoli attriti conviene una velocità più o meno verticale del caso senza attrito per raggiungere il punto più lontano possibile.

2. Data una particella di massa unitaria che si muove sotto l'influenza del potenziale $V(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{a^2}{2}y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$, con condizioni iniziali $x(0) = y(0) = 1$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$. Si dica per quali $a \neq 0$ la traiettoria è periodica.

Soluzione

1. Sia $x \in \mathbb{R}^3$ e il piano terrestre sia $x_3 = 0$. Allora le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg(0, 0, 1) \\ x(0) &= 0 ; \dot{x}(0) = (\cos \theta, 0, \sin \theta). \end{aligned}$$

Ne segue che $x_2(t) = 0$, $x_1(t) = t \cos \theta$ e $x_3(t) = t \sin \theta - \frac{g}{2}t^2$. Dunque il corpo torna sulla superficie al tempo $t_0 = \frac{2}{g} \sin \theta$. Ne segue che $x_1(t_0) = \frac{2}{g} \sin \theta \cos \theta = \frac{m}{g} \sin 2\theta$. Ne segue che $x_1(t_0)$ attiene il suo valore massimo, $\frac{1}{g}$, per $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Vediamo ora che succede in presenza di attrito. Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\gamma \dot{x} - mg(0, 0, 1) \\ x(0) &= 0 ; \dot{x}(0) = (\cos \theta, 0, \sin \theta). \end{aligned}$$

Nuovamente $x_2(t) = 0$. Mentre,

$$\dot{x}_1(t) - \cos \theta = -\frac{\gamma}{m} x_1(t)$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \left[e^{\frac{\gamma}{m}t} x_1(t) \right] = e^{\frac{\gamma}{m}t} \cos \theta$$

quindi

$$x_1(t) = \frac{m}{\gamma} \left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right] \cos \theta.$$

Finalmente possiamo scrivere

$$\frac{d}{dt} \left[e^{\frac{\gamma}{m}t} \dot{x}_3(t) \right] = -e^{\frac{\gamma}{m}t} g.$$

Da cui,

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) &= e^{-\frac{\gamma}{m}t} \sin \theta - \frac{mg}{\gamma} \left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right] \\ x_3(t) &= \frac{m}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right) \sin \theta - \frac{gm}{\gamma} t + \frac{gm^2}{\gamma^2} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right). \end{aligned}$$

Chiamando $t_0(\theta)$ il tempo per cui $x_3(t_0(\theta)) = 0$ si ha

$$\begin{aligned} t_0(\theta) &= \frac{1}{g} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t_0(\theta)} \right) \left(\sin \theta + \frac{mg}{\gamma} \right) \\ x_1(t_0(\theta), \theta) &= \frac{m}{\gamma} \left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t_0(\theta)} \right] \cos \theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Se vogliamo capire come varia il tempo t_0 per piccoli γ scriviamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t_0(\theta)}}{g\gamma} \sin \theta + m \frac{1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t_0(\theta)} - \frac{\gamma}{m}t_0(\theta)}{\gamma^2} \\ &= \left(t_0(\theta) - \frac{\gamma}{2m} t_0^2(\theta) \right) \sin \theta - \frac{g}{2} t_0^2 + \frac{g\gamma}{6m} t_0^3 + \mathcal{O}(\gamma^2) \end{aligned}$$

Ovvero

$$t_0 = \frac{2}{g} \sin \theta - \left(\frac{2}{g} \sin^2 \theta + \frac{1}{3m} \right) \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2)$$

$$\begin{aligned}
t_0 &= \frac{2}{g} \sin \theta - \left(\frac{\sin \theta}{mg} t_0 - \frac{1}{3m} t_0^2 \right) \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \\
&= \frac{2}{g} \sin \theta - \left(\frac{2 \sin^2 \theta}{mg^2} - \frac{4 \sin^2 \theta}{3mg^2} \right) \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \\
&= \frac{2}{g} \sin \theta - \frac{2 \sin^2 \theta}{3mg^2} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2)
\end{aligned}$$

D'altro canto differenziando la prima delle (1) rispetto a θ si ha

$$\begin{aligned}
t'_0(\theta) &= \frac{\gamma}{gm} t'_0(\theta) e^{-\frac{\gamma}{m} t_0(\theta)} \left(\sin \theta + \frac{mg}{\gamma} \right) + \frac{1}{g} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t_0(\theta)} \right) \cos \theta \\
&= \frac{\gamma}{gm} t'_0(\theta) \left(\sin \theta + \frac{mg}{\gamma} \right) - \frac{\gamma}{gm} t'_0(\theta) \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t_0(\theta)} \right) \left(\sin \theta + \frac{mg}{\gamma} \right) \\
&\quad + \frac{\cos \theta}{g \left(\sin \theta + \frac{mg}{\gamma} \right)} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t_0(\theta)} \right) \left(\sin \theta + \frac{mg}{\gamma} \right) \\
&= \frac{\gamma}{mg} t'_0(\theta) \sin \theta + t'_0(\theta) - \frac{\gamma}{m} t'_0(\theta) t_0(\theta) + \gamma \frac{\cos \theta}{(\gamma \sin \theta + mg)} t_0(\theta)
\end{aligned}$$

Ovvero,

$$\left(\frac{t_0(\theta)}{m} - \frac{\sin \theta}{mg} \right) t'_0(\theta) = \frac{\cos \theta}{(\gamma \sin \theta + mg)} t_0(\theta)$$

Sviluppando in γ

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin \theta}{gm} - \frac{2 \sin^2 \theta}{3m^2 g^2} \gamma \right) t'_0(\theta) &= \left(\frac{\cos \theta}{mg} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{m^2 g^2} \gamma \right) \left(\frac{2}{g} \sin \theta - \frac{2 \sin^2 \theta}{3mg^2} \gamma \right) \\
&= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{mg^2} - \frac{8 \cos \theta \sin^2 \theta}{3m^2 g^3} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2).
\end{aligned}$$

Ovvero

$$t'_0(\theta) = \frac{2 \cos \theta}{g} - 4 \frac{\cos \theta \sin \theta}{3mg^2} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2)$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta} x_1(t_0, \theta) &= e^{-\frac{\gamma}{m} t_0(\theta)} t'_0(\theta) \cos \theta - \frac{m}{\gamma} \left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t_0(\theta)} \right] \sin \theta \\
&= t'_0(\theta) \cos \theta - \frac{\gamma}{m} t_0(\theta) t'_0(\theta) \cos \theta - t_0(\theta) \sin \theta + \frac{\gamma}{2m} t_0^2(\theta) \sin \theta + \mathcal{O}(\gamma^2) \\
&= \frac{2 \cos^2 \theta}{g} - \frac{2}{g} \sin^2 \theta - \frac{\sin \theta}{3mg^2} [16 \cos^2 \theta - 8 \sin^2 \theta] \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2)
\end{aligned}$$

Ponendo $\theta = \frac{\pi}{4}$, si ha

$$\frac{d}{d\theta} x_1(t_0, \frac{\pi}{4}) = -\frac{4}{3\sqrt{2}mg^2} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2).$$

Ovvero la derivata di $x_1(t(\theta))$ per $\theta = \frac{\pi}{4}$ è negativa e questo significa che calando θ si atterra in un punto più lontano. Quindi in presenza di attrito per andare più lontano conviene partire con un angolo più piccolo di $\frac{\pi}{4}$.

2. Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -x \\
\ddot{y} &= -a^2 y
\end{aligned}$$

da cui si ha $x(t) = \cos t$ e $y(t) = \cos at$. La traiettoria è periodica se esiste un tempo T tale che $x(T) = y(T) = 1$ e $\dot{x}(T) = \dot{y}(T) = 0$. Questo accade solo per $T = 2\pi n$ e, contemporaneamente $T = \frac{2\pi}{a}m$. Ovvero se $a = \frac{m}{n}$, quindi $a \in \mathbb{Q}$.