Fisica Matematica I

Primo Appello, Sessione Estiva, 12-06-22

Cognome........................ Nome........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si consideri il moto unidimensionale $x(t)$ di una particella di massa 1 sotto l'azione del potenziale $V(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$. Si determino tutte le condizioni iniziali per cui il moto è limitato per tutti i tempi. Si determino tutte le condizioni iniziali per cui il moto è limitato per tutti i tempi positivi.

2. Si considerino tre particelle elettricamente cariche su un piano orizzontale.[1] La prima ha carica $+1$ ed è vincolata all'origine, la seconda ha massa 1, carica -1 con condizioni iniziali $(\varepsilon, 0)$ e velocità $(0, \varepsilon^{-\frac{1}{2}})$, $\varepsilon > 0$. La terza ha carica ε^3 e massa ε^3 con condizioni iniziali $(3, 0)$ e velocità $(0, 0)$. Si studi il moto $y_\varepsilon(t)$ della terza particella nel limite $\varepsilon \to 0$. Infine, si calcoli il limite, per $t \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|y_\varepsilon(\varepsilon^{-1}t) - y(0)\|.$$

3. Sia data una particella di massa m che si muove in un piano orizzontale sotto l'influenza del potenziale $V(x) = \frac{1}{4}\|x\|^4 - \frac{1}{2}\|x\|^2$, $x \in \mathbb{R}^2$. Si esibiscano due condizioni iniziali, possibilmente con velocità ortogonali, che danno luogo a moti periodici.

[1] Si ricordi che due particelle di cariaca e_1, e_2 e coordiante x, y, rispettivamente, sono soggette ad un potenziale $V(x, y) = \frac{e_1 e_2}{\|x-y\|}$.

Soluzione

1. Si noti che $V'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geqslant 0$. Dunque il potenziale ha un puto di equilibrio per $x = 1$. Dunque la condizione iniziale $x_0 = 1, v_0 = 0$ da luogo ad un moto limitato per tutti i tempi. Il solo modo in cui un moto può essere limitato per tempi positivi è se tende asintoticamente a 1. Questo è possibile solo se ha energia $V(1) = \frac{1}{3}$. Siccome V è crescente questo può accadere solo se $x_0 < 1$. In tal caso si ha che se $v_0 = \sqrt{\frac{2}{3} - 2V(x_0)}$ il moto è limitato e $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$. Si noti che per tempi negativi il moto esplode all'infinito in un tempo finito e dunque è ben lungi dall'essere limitato.

2. Siano $x, y \in \mathbb{R}^2$ le posizioni della seconda e terza particella, rispettivamente. La Lagrangiana del sistema è
$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2 + \frac{\varepsilon^3}{2}\|\dot{y}\|^2 + \|x\|^{-1} - \varepsilon^3\|y\|^{-1} + \varepsilon^3\|x-y\|^{-1}$$
Le equaioni di Eulero Lagrange sono
$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{x}{\|x\|^3} + \varepsilon^3\frac{x-y}{\|x-y\|^3}\\
\varepsilon^3\ddot{y} &= -\varepsilon^3\frac{y}{\|y\|^3} - \varepsilon^3\frac{x-y}{\|x-y\|^3}\\
x(0) &= (\varepsilon, 0), \quad \dot{x}(0) = (0, \varepsilon^{-\frac{1}{2}})\\
y(0) &= (3, 0), \quad \dot{y}(0) = (0, 0).
\end{aligned}$$
La prima equazione, se non ci fosse il secondo termine, avrebbe soluzione $v(t) = \varepsilon(\cos\omega t, \sin\omega t)$, con $\omega = \varepsilon^{-\frac{3}{2}}$. Sembra quindi naturale riscalare il tempo e spazio scrivendo l'equazione per la funzione $\xi(t) = \varepsilon^{-1}x(\omega^{-1}t)$:
$$\begin{aligned}
\ddot{\xi}(t) &= \frac{\xi(t)}{\|\xi(t)\|^3} - \varepsilon\frac{\varepsilon\xi(t) + y(\omega^{-1}t)}{\|\varepsilon\xi(t) - y(\omega^{-1}t)\|^3}\\
\ddot{y}(t) &= -\frac{y(t)}{\|y(t)\|^3} - \frac{\varepsilon\xi(\omega t) - y(t)}{\|\varepsilon\xi(\omega t) - y(t)\|^3}.
\end{aligned} \tag{1}$$
Ne segue che se $\|y\| \geqslant 2$ e $\|\xi\| \in [1, \varepsilon^{-1}]$, esiste $C > 0$ tale che il secondo termine a destra della prima equazione di (1) è minore di $C\varepsilon$. Possiamo quindi scrivere $\xi(t) = (\sin t, \cos t) + \varepsilon\eta(t)$ che implica, sviluppando in serie, che esiste $C_1 > 0$ tale che, per ε sufficiente piccolo,
$$\ddot{\eta}(t) \leqslant C_1.$$
Quindi, dato $T \in \mathbb{R}$, per ε sufficientemente piccolo, si ha che $\|\eta\| \leqslant \frac{C_1}{2}T^2$.[2]
Se $\|y\| \geqslant 2$, allora possiamo scrivere, per $t \leqslant T$,
$$\dot{y}(t) = \int_0^t \left[-\frac{y(s)}{\|y(s)\|^3} + \frac{y(s) - \varepsilon\xi(\omega s)}{\|y(s) - \varepsilon\xi(\omega s)\|^3}\right] ds$$
Poichè $\dot{y}(0) = 0$ ne segue che esiste un tempo $t_\varepsilon > 0$ tale che $\|y(t) - (3, 0)\| \leqslant 1$ per ogni $t \leqslant t_\varepsilon$. Per questi tempi possiamo sviluppare in serie e otteniamo
$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \varepsilon\int_0^t \left[-\frac{\xi(\omega s)}{\|y(s)\|^3} + \frac{3\langle y(s), \xi(\omega s)\rangle}{\|y(s)\|^3}\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\\
&= \varepsilon\int_0^t \left[-\|y(s)\|^{-3}\omega^{-1}\frac{d}{dt}\int_0^{\omega s}\xi(\tau)d\tau + 3\langle y(s)\|y(s)\|^{-3}, \omega^{-1}\frac{d}{dt}\int_0^{\omega s}\xi(\tau)d\tau\rangle\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\\
&= \mathcal{O}(\varepsilon\omega^{-1} + \varepsilon^2) = \mathcal{O}(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

[2] In alternativa, forse meglio, si può usare la dipendenza liscia delle soluzioni delle equazioni differenziali da un parametro.

dove, nell'ultima riga, abbiamo integrato per parti. Quindi $t_\varepsilon \sim \varepsilon^{-2}$ e

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|y(\varepsilon^{-1}t) - y(0)\| = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}t\varepsilon^2) = 0.$$

3. La Lagrangiana è $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\|\dot{x}\|^2 - V(x)$. Siccome il potenziale ha una simmetria sferica, è conveniente introdurre le coordinate polari. Sia $x = r(\cos\theta, \sin\theta)$ allora $\dot{x} = \dot{r}(\cos\theta, \sin\theta) + r(-\sin\theta, \cos\theta)\dot{\theta}$ e

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2.$$

Dunque le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= 2r\dot{\theta}^2 - r^3 + r \\ m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Ne segue che il momento angolare $\ell = r^2\dot{\theta}$ è una quantità comservata e possiamo scrivere la prima equazione come

$$m\ddot{r} = 2r^{-3}\ell^2 - r^3 + r.$$

Una possibile condizione iniziale è $\dot{\theta}(0) = 0$, then $\ell = 0$ e dunque $\theta(t) = \theta(0)$ mentre r soddisfa l'equazione

$$m\ddot{r} = -r^3 + r,$$

i cui moti sono tutti periodici a meno che l'energia non sia nulla. Un'altra possibilità è, ponendo $r(0) = r_0 \neq 0$, che $2r_0^{-3}\ell^2 - r_0^3 + r_0 = 0$, ovvero $2\ell^2 - r_0^6 + r_0^4 = 0$, e $\dot{r}(0) = 0$. In questo caso la soluzione è $r(t) = r_0$ è $\theta(t) = \theta(0) + \dot{\theta}(0)t \mod 2\pi$ che da un moto periodico di periodo $\frac{2\pi}{\dot{\theta}(0)}$.