

Fisica Matematica I

Secondo Appello, Sessione Autunnale, 12-02-25

Cognome..... Nome.....

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si consideri una particella di massa m in un piano orizzontale vincolata a muoversi su una curva $\{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$ che unisce i punti $(0, 1)$ e $(1, 0)$, dove f è una funzione differenziabile. La particella al tempo zero è a riposo nel punto $(0, 1)$ ed è sottoposta ad una forza $F := (1, 0)$. Si mostri che la curva determinata dalla funzione $f(x) = 1 - x$ non genera il moto per cui la particella si muove dal punto $(0, 1)$ al punto $(1, 0)$ nel minor tempo possibile.
2. Un punto materiale di massa m si muove sulla retta soggetto a una forza di potenziale $V(x) = x^2/2 + x^3/3$. Si dimostri che esistono orbite periodiche in cui il valore medio (rispetto al tempo) della posizione non è nullo.
3. Si consideri il moto unidimensionale di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto all'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx},$$

dove l'energia potenziale $U(x)$ è definita da:

$$U(x) = (x^2 - a^2)^2 \cdot (x^2 - (a + 1)^2)$$

per un parametro $a \in \mathbb{R}^+$. Si determinino tutte e sole le condizioni iniziali del tipo:

$$(x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, v_0),$$

cui fanno seguito dei moti tali per cui esiste, finito, il

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0, v_0) .$$

Infine, si determinino tutti i possibili valori di tale limite, quando esso è ben definito.

Soluzione

1. Si noti che l'energia iniziale è nulla, dunque, detto $\xi = (x, y)$, $0 = \frac{m}{2} \|\dot{\xi}\|^2 + x^2$. Poichè $\xi = (x, f(x))$ abbiamo

$$0 = \frac{m}{2}(1 + f'(x)^2)\dot{x}^2 - x$$

ovvero

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2x}{m(1 + f'(x)^2)}}.$$

Dunque, detto $T(f)$ il tempo per muoversi tra i due punti lungo la curva determinata dalla funzione f si ha

$$T(f) = \int_0^1 \sqrt{\frac{m(1 + f'(x)^2)}{2x}} dx.$$

Vogliamo trovare il minimo di T . Questo è esattamente il problema di trovare il minimo di una azione che corrisponde alla Lagrangiana $\mathcal{L}(f, f') = \sqrt{\frac{m(1 + f'(x)^2)}{2x}}$, quindi i punti stazionari sono dati dalle equazioni di Eulero, Lagrange

$$\frac{d}{dx} \mathcal{L}^{-1} \frac{mf'(x)}{2x} = 0.$$

Ovvero,

$$\frac{mf'(x)}{2x} = C \sqrt{\frac{m(1 + f'(x)^2)}{2x}}$$

per una qualche costante C . Da questo segue che deve essere

$$(1 - 2xC^2)f'(x)^2 = 2C^2x$$

cosa possibile solo se $C \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dunque (visto che la f deve decrescere)

$$f'(x) = -\sqrt{\frac{2C^2x}{1 - C^2x}}$$

Ovvero

$$f(x) = 1 - \int_0^x \sqrt{\frac{2C^2y}{1 - C^2y}} dy$$

e C è determinata dalla condizione $f(1) = 0$. Chiaramente f non è una funzione lineare e quindi la funzione lineare non può essere un minimo.

2. Il valore medio della posizione è dato $\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$, dove T è il periodo. Il potenziale ha un punto di equilibrio instabile in -1 dove vale $1/6$ e uno stabile in zero. Esistono orbite periodiche per tutti i valori dell'energia minori di $1/6$. Ne segue che per energie $E = 1/6 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, il punto spende la maggior parte del suo tempo vicino a -1 e quindi il valore medio può essere vicino a -1 quanto si vuole.

3. Prima di tutto dobbiamo studiare la forma del potenziale.

$$U'(x) = 2x(x^2 - a^2)(2x^2 - 2(a+1)^2 + x^2 - a^2) = 2x(x^2 - a^2)(3x^2 - 2(a+1)^2 - a^2)$$

Dunque i punti critici del potenziale sono $0, \pm a$, e $\pm \sqrt{\frac{2}{3}(a+1)^2 + \frac{1}{3}a^2} =: \pm b$. Si noti che $b > a$. Chiaramente $x = 0$ è un minimo. Quindi $\pm a$ sono massimi e $\pm b$ minimi.

Per cominciare notiamo che se x_* è il limite allora deve essere $U'(x_*) = 0$. Infatti se $U'(x_*) = \gamma \neq 0$, allora esiste un intorno $I \ni x_*$ per cui $\inf_{x \in I} |U'(x)| \geq \gamma/2$. D'altro canto esiste $t_* > 0$ tale che $x(t) \in I$ per ogni $t > t_*$. Ma in tal caso

$$x(t) = x(t_*) + \int_{t_*}^t ds \int_{t_*}^s d\tau \ddot{x}(\tau) = x(t_*) - \int_{t_*}^t ds \int_{t_*}^s d\tau U'(x(\tau)).$$

Dunque

$$|x(t) - x(t_*)| \geq \int_{t_*}^t ds \int_{t_*}^s d\tau \frac{\gamma}{2} = \frac{(t - t_*)^2 \gamma}{4}.$$

Ma questo implica che $x(t)$ eventualmente esce da I , contrariamente all'ipotesi. Dunque i valori possibili del limite sono i punti di equilibrio.

Per quanto riguarda le condizioni iniziali abbiamo che, oltre ad essere in un punto di equilibrio con velocità nulla, gli unici moti asintotici ad un punto fisso accadono per punti di equilibrio instabile. Quindi le condizioni iniziali che danno luogo a moti asintotici sono $(0, 0)$, $(\pm b, 0)$ e tutte le condizioni iniziali che hanno la stessa energia di $(a, 0)$, ovvero

$$\frac{1}{2}v_0^2 + U(x_0) = 0.$$

Cioè $v_0 = \pm \sqrt{-2U(x_0)}$, questo significa che

$$x_0 \in \{x \in \mathbb{R} : U(x) \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq a + 1\}.$$