

Fisica Matematica I

Secondo Appello, Sessione Autunnale, 18-09-24

Cognome..... Nome.....

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorare**.

1. Si consideri una particella di massa uno che si muove nel potenziale $U(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$, senza attrito. Si mostri che i moti con energia $E > 0$ consistono di una orbita periodica. Sia $T(E)$ il periodo del moto con energia $E > 0$. Si calcoli

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{\ln T(E)}{\ln E}.$$

2. Sia dato in un piano un disco omogeneo di raggio R , massa M e centro nell'origine e sia Q un punto sul disco a distanza $R/2$ dal centro. Inoltre sia P un punto materiale di massa m vincolato a muoversi sulla retta delle ascisse e tale che $\|P - Q\| = 2R$. Infine il punto P è connesso col punto $(0, 2R)$ da una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo nulla. Si studino i punti di equilibrio di tale sistema e se ne discuta la stabilità. Si scriva l'Hamiltoniana e si mostri che è conservata lungo le soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si consideri la funzione $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ tale che $g(x) = 0$ per $x \notin [0, 1]$ e $\int_0^1 g(t)dt = 1$ e si definisca la forza

$$F_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}g(\varepsilon^{-1}t).$$

Sia x_ε il moto determinato da

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -\lambda\dot{x}(t) + F_\varepsilon(t) \\ x(0) &= 0; \quad \dot{x}(0) = 0. \end{aligned}$$

Si studi $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t)$, $t > 0$.

Soluzione

1. Il potenziale ha due minimi e un massimo locale a zero in cui vale zero. Quindi se $E > 0$ l'equazione $U(x) = E$ ha solo due soluzioni $x_+(E) = -x_-(E)$ e il moto è periodico tra tali due estremi. Il periodo è dato dalla formula.

$$T(E) = 2 \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{1}{\sqrt{2(E - U(x))}} dx.$$

Convien usare la variabile $x = E^{\frac{1}{4}}\xi$. Allora $U(x) = E$ diventa

$$\frac{1}{4}\xi^4 - \frac{1}{2\sqrt{E}}\xi^2 - 1 = 0.$$

Possiamo allora porre $\alpha = \frac{1}{\sqrt{E}}$ e considerare la funzione $F(\xi, \alpha) = \frac{1}{4}\xi^4 - \frac{\alpha}{2}\xi^2 - 1$. Poichè $F(\sqrt{2}, 0) = 0$ and $\partial_\xi F(\xi, \alpha) = \xi^3 - \alpha\xi \neq 0$ a patto che $\xi \notin \{0, \pm\sqrt{\alpha}\}$ possiamo applicare il teorema della funzione implicita che ci dice che

$$\frac{x_+(E)}{E^{\frac{1}{4}}} = \xi_+(E) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{E} - 2} + \mathcal{O}(E^{-1}).$$

Cambiando variabile nell'integrale e usando la simmetria si ha

$$\begin{aligned} T(E) &= 4E^{-\frac{1}{4}} \int_0^{\xi_+(E)} \frac{1}{\sqrt{2(1 - \frac{1}{4}\xi^4 + \frac{1}{2\sqrt{E}}\xi^2)}} d\xi \\ &= 4E^{-\frac{1}{4}} \int_0^{\xi_+(E)} \frac{1}{\sqrt{2(\frac{1}{4}\xi_+(E)^4 - \frac{1}{2\sqrt{E}}\xi_+(E)^2 - \frac{1}{4}\xi^4 + \frac{1}{2\sqrt{E}}\xi^2)}} d\xi \\ &= 4E^{-\frac{1}{4}} \int_0^{\xi_+(E)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(\xi_+ - \xi)[\xi_+^3 + \xi_+^2\xi + \xi^2\xi_+ + \xi^3 - 2E^{-\frac{1}{2}}(\xi_+ + \xi)]}} d\xi. \end{aligned}$$

È quindi conveniente introdurre la nuova variabile $\xi = \xi_+\eta$ e scrivere

$$T(E) = \frac{4}{E^{\frac{1}{4}}\xi_+(E)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \eta)[1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 - 2E^{-\frac{1}{2}}\xi_+^{-2}(1 + \eta)]}} d\eta$$

da cui, per E grande, segue

$$\frac{4}{E^{\frac{1}{4}}\xi_+(E)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2(1 - \eta)}} d\eta \leq T(E) \leq \frac{4}{E^{\frac{1}{4}}\xi_+(E)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}(1 - \eta)}} d\eta$$

ovvero

$$\frac{8}{\sqrt{2}E^{\frac{1}{4}}\xi_+(E)} \leq T(E) \leq \frac{16}{E^{\frac{1}{4}}\xi_+(E)}.$$

Ne segue che

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{\ln T(E)}{\ln E} = -\frac{1}{4}.$$

Si noti che l'idea di base è di stimare dall'alto e dal basso il periodo in modo che le due stime coincidano nel limite. Questo può essere fatto in vari modi, quello di cui sopra è più raffinato di quanto serva, ma da una idea precisa di come ottenere risultati più precisi e vi dovrebbe essere familiare visto che è simile a quello che ho fatto per lo studio delle piccole oscillazioni in una dimensione.

2. Sia θ l'angolo che descrive la rotazione del disco. Poichè Q è solidale col disco possiamo assumere $Q = \frac{R}{2}v(\theta)$, $v(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ e $P = (x, 0)$ allora

$$4R^2 = \|P - Q\|^2 = x^2 - Rx \cos \theta + \frac{R^2}{4}.$$

Ovvero

$$x = \frac{R}{2} \left[\cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta + 15} \right] =: x_{\pm}(\theta).$$

Si ponga $w_{\pm}(\theta) = -\frac{R}{2} \left[\sin \theta \pm \cos \theta \sin \theta [\cos^2 \theta + 15]^{-\frac{1}{2}} \right] = \frac{d}{d\theta} x_{\pm}(\theta)$. Si noti che $x_{\pm}$ non può mai essere zero e quindi o è sempre positivo e sempre negativo, ovvero lo spazio delle configurazioni non è connesso. Possiamo quindi scrivere la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{MR^2}{4} \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} \|w_{\pm}(\theta)\|^2 \dot{\theta}^2 - \frac{K}{2} (x_{\pm}(\theta)^2 + 4R^2).$$

Ne segue che i punti di equilibrio sono dati da $V'(\theta) = Kx_{\pm}(\theta)w_{\pm}(\theta) = 0$, that is $w_{\pm}(\theta) = 0$. Questo è possibile solo se $\sin \theta = 0$. Abbiamo quindi quattro punti di equilibrio: $\theta \in \{0, \pi\}$ e per ogni valore di θ abbiamo un equilibrio per x positivo e uno per x negativo. Se $\theta = 0$ si ha che l'equilibrio è instabile se x è positivo e stabile se x è negativo e viceversa per $\theta = \pi$.

Il momento è dato da

$$p_{\theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \left[\frac{MR^2}{2} + m \|w_{\pm}(\theta)\|^2 \right] \dot{\theta} =: \Gamma(\theta) \dot{\theta}.$$

quindi

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \Gamma(\theta)^{-1} p_{\theta}^2 + \frac{K}{2} (x_{\pm}(\theta)^2 + 4R^2) =: \frac{1}{2} \Gamma(\theta)^{-1} p_{\theta}^2 + V(\theta).$$

Inoltre,

$$\dot{p}_{\theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}.$$

Quindi,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = -\frac{\Gamma'}{2\Gamma^2} \dot{\theta} p_{\theta}^2 + \frac{1}{\Gamma} p_{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + V' \dot{\theta} = 0.$$

3. Integrando rispetto al tempo, per $t \leq \varepsilon$ abbiamo

$$m\dot{x}_{\varepsilon}(t) = -\lambda x_{\varepsilon}(t) + \int_0^t F_{\varepsilon}(s) ds = -\lambda x_{\varepsilon}(t) + \int_0^{\varepsilon^{-1}t} g(s) ds.$$

Cerchiamo una soluzione della forma $x_{\varepsilon}(t) = e^{-\frac{\lambda}{m}t} z_{\varepsilon}(t)$. Allora

$$\dot{z}_{\varepsilon}(t) = e^{\frac{\lambda}{m}t} \int_0^{\varepsilon^{-1}t} g(s) ds \geq 0. \quad (1)$$

Quindi $x_{\varepsilon}(t) \geq 0$ per $t \in [0, \varepsilon]$.

Per $t \geq \varepsilon$ abbiamo¹

$$m\dot{x}_{\varepsilon}(t) = -\lambda x_{\varepsilon}(t) + \int_0^1 F_{\varepsilon}(s) ds = -\lambda x_{\varepsilon}(t) + 1.$$

¹Infatti, è più semplice continuare ad usare la (1). Uso una strategia leggermente differente solo per fare vedere un'altra possibilità su come affrontare il problema.

Integrando un'altra volta abbiamo

$$mx_\varepsilon(t) = -\lambda \int_0^t x_\varepsilon(s) ds + t.$$

Dunque per Gronwall

$$x_\varepsilon(t) \leq t + \frac{\lambda}{m} \int_0^t e^{\frac{\lambda}{m}(t-s)} s ds = t + \frac{m^2}{\lambda^2} e^{\frac{\lambda}{m}t} - \frac{m^2}{\lambda^2} - \frac{m}{\lambda} t$$

che implica

$$x_\varepsilon(\varepsilon) \leq a_\varepsilon$$

con $0 \leq a_\varepsilon \leq C\varepsilon$, per qualche costante C . Ne segue che per $t \geq \varepsilon$ si ha che $y_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t + \varepsilon)$ è soluzione di

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_\varepsilon(t) &= -\lambda\dot{y}_\varepsilon(t) \\ y_\varepsilon(0) &= a_\varepsilon; \quad \dot{y}_\varepsilon(0) = m^{-1}. \end{aligned}$$

Che, infatti, integrando da

$$\begin{aligned} m\dot{y}_\varepsilon(t) &= -\lambda y_\varepsilon(t) + 1 \\ y_\varepsilon(0) &= a_\varepsilon. \end{aligned}$$

Per la continuità rispetto alle condizioni iniziali segue che esiste $y(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(t)$ e che soddisfa

$$\begin{aligned} m\ddot{y}(t) &= -\lambda\dot{y}(t) \\ y(0) &= 0; \quad \dot{y}(0) = m^{-1}. \end{aligned}$$

Infine, per la continuità delle soluzioni delle ODE si ha che, per ogni $t > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(t - \varepsilon) = y(t).$$

Ovvero abbiamo che la forza agisce istantaneamente (i fisici la chiamano un *forza impulsiva*) ed ha il solo effetto di cambiare la condizione iniziale della velocità. Il moto è quindi lo stesso che si avrebbe se la velocità iniziale fosse stata m^{-1} .

Per altro l'equazione per y si risolve facilmente:

$$y(t) = \frac{m}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t} \right).$$

In alternativa, come già detto, si può continuare con la (1) e scrivere

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) &= \int_0^t ds e^{\frac{\lambda}{m}(s-t)} \int_0^{\varepsilon^{-1}s} g(\tau) d\tau \\ &= \int_0^\varepsilon ds e^{\frac{\lambda}{m}(s-t)} \int_0^{\varepsilon^{-1}s} g(\tau) d\tau + \int_\varepsilon^t ds e^{\frac{\lambda}{m}(s-t)}. \end{aligned}$$

Si noti che $\left| \int_0^\varepsilon ds e^{\frac{\lambda}{m}(s-t)} \int_0^{\varepsilon^{-1}s} g(\tau) d\tau \right| \leq C\varepsilon$, quindi possiamo facilmente calcolare il limite, per $t > 0$,

$$y(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t) = \int_0^t ds e^{\frac{\lambda}{m}(s-t)} = \frac{m}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t} \right).$$

come già sapevamo.