

Fisica Matematica I

Primo Appello, Sessione Autunnale, 29-08-24

Cognome..... Nome.....

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. In un piano verticale si considerino due particelle, di massa uno, di cui una vincolata a muoversi su un cerchio di raggio r . Le due particelle sono collegate da una molla ideale di costante elastica K . Si scrivano le equazioni del moto, si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità. Si trovino i modi normali per gli eventuali punti di equilibrio stabili.
2. Sia $\varepsilon > 0$. In un piano verticale una particella di massa m con posizione iniziale $(0, \varepsilon/2)$ e velocità iniziale $(v, 0)$ è vincolata a muoversi sulla curva $\gamma_\varepsilon(x) = (x, \frac{\varepsilon}{2} \cos \varepsilon^{-1} x)$. Detto $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ il moto risultante, si studi il limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)).$$

3. Una particella di massa m si muove in $\mathbb{R}^3$ vincolata alla superficie della sfera di raggio r in assenza di forze esterne. Si descriva la traiettoria più breve che va dal punto $(r, 0, 0)$ al punto $(0, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}})$ nel tempo T .

Soluzione

1. Senza perdita di generalità possiamo assumere che il centro del cerchio si trovi nell'origine. Possiamo quindi descrivere la posizione della particella vincolata come $z(\theta) = r(\sin \theta, -\cos \theta)$, mentre usano $x = (x_1, x_2)$ per le coordinate della seconda particella. Dunque possiamo scrivere la Lagrangiana come

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta, x) &= \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}\|z(\theta) - x\|^2 + gr \cos \theta - gx_2 \\ &= \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(r^2 - 2rx_1 \sin \theta + x_1^2 + 2rx_2 \cos \theta + x_2^2) + gr \cos \theta - gx_2.\end{aligned}$$

Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned}r^2\ddot{\theta} - krx_1 \cos \theta - rkx_2 \sin \theta + gr \sin \theta &= 0 \\ \ddot{x}_1 - rk \sin \theta + kx_1 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + rk \cos \theta + kx_2 + g &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Quindi i punti di equilibrio soddisfano

$$\begin{aligned}x_1 &= r \sin \theta \\ x_2 &= -r \cos \theta - k^{-1}g \\ 2rg \sin \theta &= 0.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi due soluzioni $\theta = 0, x_1 = 0, x_2 = -r - k^{-1}g$, e $\theta = \pi, x_1 = 0, x_2 = r - k^{-1}g$. La prima corrisponde ad un minimo del potenziale ed è quindi stabile. La derivata seconda del potenziale nel punto di equilibrio stabile è

$$A = \begin{pmatrix} kr^2 + 2gr & -kr & 0 \\ -kr & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Ponendo

$$M = \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per la teoria generale le piccole oscillazioni sono determinate dalle soluzione del sistema lineare

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\Omega^2 & 0 \end{pmatrix} z,$$

dove

$$\Omega^2 = M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} k + 2gr^{-1} & -k & 0 \\ -k & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

è la matrice i cui autovettori determinano i modi normali.

2. La lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{8}(\sin \varepsilon^{-1}x)^2\dot{x}^2 - \frac{g}{2}\varepsilon \cos \varepsilon^{-1}x.$$

e l'Hamiltoniana da

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2} \left[1 + \frac{1}{4}(\sin \varepsilon^{-1}x)^2 \right] \dot{x}^2 + \frac{g}{2}\varepsilon \cos \varepsilon^{-1}x.$$

Poichè la velocità iniziale è tangente al vincolo in zero, l'energia della particella è $E = \frac{m}{2}v^2$. Dalla conservazione della energia segue che, se $2Eg^{-1} > \varepsilon$,

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2E - g\varepsilon \cos \varepsilon^{-1}x}{m(1 + \frac{1}{4}(\sin \varepsilon^{-1}x)^2)}}$$

visto che in questo caso il segno della velocità non può cambiare e rimane quindi sempre positiva. Ne segue che $\dot{x}_\varepsilon$ è uniformemente limitato e quindi, per Ascoli Arzelà, la successione x_ε ammette sottosuccessioni convergenti. Sia $x_j := x_{\varepsilon_j}$ una tale sottosuccessione e $X(t)$ il suo limite, allora

$$t = \int_0^t \frac{\dot{x}_j(s)}{\sqrt{\frac{2E - g\varepsilon \cos \varepsilon^{-1}x_j(s)}{m(1 + \frac{1}{4}(\sin \varepsilon^{-1}x_j(s))^2)}}} ds = \varepsilon \int_0^{\varepsilon^{-1}x_j(t)} \left[\frac{m(1 + \frac{1}{4}(\sin z)^2)}{2E - g\varepsilon \cos z} \right]^{\frac{1}{2}} dz.$$

Poiché l'integrando è periodico di periodo 2π possiamo scrivere $\varepsilon^{-1}x_j(t) = n2\pi + \xi$, $n \in \mathbb{N}$, dove $|\xi| \leq 2\pi$ e definiamo

$$V := v \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(\sin z)^2} dz \right]^{-1}.$$

Prendendo il limite per $j \rightarrow \infty$ otteniamo

$$t = \lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j n \int_0^{2\pi} \left[\frac{m(1 + \frac{1}{4}(\sin z)^2)}{2E - g\varepsilon \cos z} \right]^{\frac{1}{2}} dz = V^{-1}X(t).$$

Ne segue che il moto limite è un moto uniforme sulla retta orizzontale con velocità $V < v$.

3. Scegliamo come coordinante Lagrangiane le coordinate sferiche: $x = r(\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi)$. Ne segue che la lagrangiana ha la forma

$$\mathcal{L}(\theta, \varphi) = \frac{m}{2} \|\dot{x}\|^2 = \frac{m}{2} r^2 (\dot{\varphi}^2 + (\cos \varphi)^2 \dot{\theta}^2).$$

Dunque le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= 0 \\ \ddot{\varphi} &= -\cos \varphi \sin \varphi \dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

Visto che $\dot{\theta}$ è costante possiamo porre $\dot{\theta}^2(t) = A$. Dunque

$$\dot{\varphi} = A(\cos \varphi)^2.$$

Poichè la posizione iniziale è $(0,0)$ ne segue che, per traiettorie che non passano da $\frac{k}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$t = \int_0^t \frac{\dot{\varphi}(s)}{A(\cos \varphi(s))^2} ds = \int_0^{\varphi(t)} \frac{1}{A(\cos \varphi)^2} d\varphi = A^{-1} \tan \varphi(t).$$

Dunque $\varphi(t) = \arctan(At)$. Per concludere, dobbiamo assicurarci che la traiettoria arrivi a $(0, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}})$ al tempo T . Dunque $\arctan(AT) = \frac{\pi}{4}$, ovvero $T = A^{-1}$, mentre $\frac{\pi}{2} = \theta(T) = A^{-1}$. Ne segue che la traiettoria si muove su un arco di cerchio massimo, ovvero lungo una geodetica.