Fisica Matematica I

Primo Appello, Sessione Autunnale, 10-07-24

Cognome........................ Nome........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si considerino due particelle di massa uno che si muovono su di una retta unidimensionale. Sia $x(t)$ la posizione della prima particella e $q(t)$ la posizione della seconda, al tempo t. Le due particelle interagiscono con un potenziale $V(x-q)$, dove $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, e $V(a) = 0$ per ogni $|a| \geqslant 1$. Inoltre la seconda particella è soggetta ad una molla, fissata all'origine, di costante elastica 1 e di lunghezza a riposo nulla. Date le condizioni iniziali $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = v > \sqrt{8\|V'\|_\infty}$, e $q(0) = \dot{q}(0) = 0$ si mostri che

   a) esiste $w(v) = \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t)$;

   b) esiste
   $$\lim_{v\to\infty} v[w(v) - v].$$

2. In un piano verticale, si consideri una barra di lunghezza 2ℓ e densità $\rho(z) = mz$ dove z è la distanza da un estremo della barra. Il punto medio di tale barra è vincolato a muoversi sull'asse verticale e connesso col punto $(0,0)$ da una molla di costante elastica k. Si scriva la Lagrangiana, le equazioni di Eulero-Lagrange, si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

3. Si consideri un sistema con lagrangiana $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R})$. Siano dati un aperto limitato $U \subset \mathbb{R}^d$, e $T \in \mathbb{R}$. Si supponga che, per ogni $a, b \in U$ e $t \in [0,T]$, $q(t,a,b)$ sia l'unica soluzione delle equazioni di Lagrange tali che $q(0,a,b) = a$ e $q(T,a,b) = b$. Finalmente sia $p(t,a,b)$ il momento associato. Si mostri che
$$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^T \mathcal{L}(q(t,a,b), \dot{q}(t,a,b))dt = p(0,a,b).$$

Soluzione

1. Le equazioni del moto sono
$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -V'(x-q)\\ \ddot{q} &= V'(x-q)-q.\end{aligned}$$
Ne segue che, ponendo $A = \|V'\|_\infty$,
$$|\dot{x}(t)-v| \leqslant tA.$$
Questo significa che per $t < \frac{v}{2A}$ la velocità della particella rimane maggiore di $v/2$. Dunque essa ragiungerà il punto 2 se $\frac{v}{2A}\frac{v}{2} \geqslant 2$, ovvero $v \geqslant \sqrt{8A}$. Quando la particella supera 2 con velocità positiva non è più soggetta ad un potenziale e quindi si muove con velocità uniforme, dunque il limite esiste. Per velocità grandi e $t < \frac{4}{v}$ possiamo scrivere,
$$|\dot{q}(t)| \leqslant \left|\int_0^t V'(x(s)-q(s)) - q(s)ds\right| \leqslant tA + \int_0^t |t-s||\dot{q}(s)|ds \leqslant tA + \frac{4}{v}\int_0^t |\dot{q}(s)|ds.$$
Quindi, per $v \geqslant 4$, la disuguaglianza di Gronwall implica
$$|\dot{q}(t)| \leqslant \left|\int_0^t V'(x(s)-q(s)) - q(s)ds\right| \leqslant tAe.$$
Inoltre
$$\dot{x}(t) = v + \int_0^t V'(x(s)-q(s))ds.$$
Da cui segue, ponendo $\|V''\|_\infty = B$,
$$\begin{aligned}\left|\dot{x}(t) - v - \int_0^t V'(-1+vs)ds\right| &\leqslant \int_0^t B\left(\int_0^s |v-\dot{x}(\tau)|d\tau + 8Aev^{-2}\right)\\ &\leqslant Cv^{-3}\end{aligned}$$
per una qualche costante C. Poichè abbiamo visto che $w(v) = \dot{x}(4v^{-1})$, otteniamo
$$\left|w(v) - v - \frac{1}{v}\int_{-1}^1 V'(\xi)d\xi\right| \leqslant Cv^{-3}.$$
Quindi $|w(v)-v| \leqslant Cv^{-3}$ da cui
$$\lim_{v\to\infty} v[w(v)-v] = 0.$$

2. Sia x la posizione del punto medio sull'asse verticale e θ l'angolo che la barra forma con la direzione orizzontale. Poniamo $v(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $n(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Allora il punto z sulla barra ha coordiante $xe_2 - (\ell - z)v(\theta)$. Quindi la massa totale della barra è $M = 2m\ell^2$. L'energia cinetica si scrive come
$$\frac{m}{2}\int_0^{2\ell} \|\dot{x}e_2 - (\ell - z)n(\theta)\dot{\theta}\|^2\rho(z)dz = m\left[\ell^2\dot{x}^2 + \frac{2}{3}\cos(\theta)\dot{x}\dot{\theta}\ell^3 + \frac{11}{3}\ell^4\dot{\theta}^2\right].$$
Si noti che il punto vincolato non è il centro di massa e quindi l'energia cinetica non è semplicemente $\frac{1}{2}M\dot{x}^2$ più una parte di rotazione del tipo $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$.

Mentre l'energia potenziale gravitazionale è

$$g\int_0^{2\ell}(x-(\ell-z)\sin\theta)zdz = gm\left(2\ell^2 x+\frac{4}{3}\ell^3\sin\theta\right).$$

Ne segue che la Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = m\left[\ell^2\dot{x}^2+\frac{2}{3}\cos(\theta)\dot{x}\dot{\theta}\ell^3+\frac{11}{3}\ell^4\dot{\theta}^2\right]-\frac{k}{2}x^2-gm\left(2\ell^2 x+\frac{4}{3}\ell^3\sin\theta\right).$$

I punti di equilibrio corripsondono agli zeri del gradiente del potenziale:

$$\begin{aligned} kx+2gm\ell^2 &= 0\\ \cos\theta &= 0. \end{aligned}$$

ovvero $x=-\frac{2gm\ell^2}{k}$, $\theta\in\{\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\}$. D'altro canto la derivata seconda del potenziale è

$$\begin{pmatrix} k & 0\\ 0 & -\sin\theta\end{pmatrix}$$

Ne segue che $x=-\frac{2gm\ell^2}{k}$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ è un equilibrio instabile mentre $x=-\frac{2gm\ell^2}{k}$, $\theta=-\frac{\pi}{2}$ è un equilibrio stabile.

3. La funzione

$$S(a,b,t)=\int_0^T\mathcal{L}(q(t,a,b),\dot{q}(t,a,b))dt$$

si chiama *funzione di Hamilton*. Derivando si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}S(a,b,t) &= \int_0^T\frac{\partial}{\partial q}\mathcal{L}(q(t,a,b),\dot{q}(t,a,b))\frac{\partial q(t,a,b)}{\partial a}dt\\ &\quad+\int_0^T\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\mathcal{L}(q(t,a,b),\dot{q}(t,a,b))\frac{\partial\dot{q}(t,a,b)}{\partial a}dt\\ &=\int_0^T\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\mathcal{L}(q(t,a,b),\dot{q}(t,a,b))\frac{\partial q(t,a,b)}{\partial a}dt\\ &\quad+\int_0^T\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\mathcal{L}(q(t,a,b),\dot{q}(t,a,b))\frac{\partial\dot{q}(t,a,b)}{\partial a}dt\\ &=\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\mathcal{L}(q(t,a,b),\dot{q}(t,a,b))\frac{\partial q(t,a,b)}{\partial a}\Big|_{t=0}^{T}\\ &\quad+\int_0^T\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\mathcal{L}(q(t,a,b),\dot{q}(t,a,b))\left[\frac{\partial\dot{q}(t,a,b)}{\partial a}-\frac{d}{dt}\frac{\partial q(t,a,b)}{\partial a}\right]dt\end{aligned}$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo usato il fatto che $q(t,a,b)$ è soluzione delle equazioni di Lagrange e quindi abbiamo integrato per parti. Il risultato segue dalla definizione del momento, dal fatto che $\frac{\partial q(0,a,b)}{\partial a}=\frac{\partial a}{\partial a}=\mathbb{1}$, $\frac{\partial q(T,a,b)}{\partial a}=\frac{\partial b}{\partial a}=0$ e che, grazie alla dipendenza liscia dai dati iniziali e finali, la quatità nella parentesi quadra è nulla per la dipendenza liscia dai dati iniziali e il Lemma di Schwartz.