Compito per il 5/04/2024

Problem 0.1. *Si consideri il moto unidimensionale di un punto materiale di massa* $m = 1$ *soggetto all'equazione differenziale*

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx},$$

dove l'energia potenziale $U(x)$ *è definita da:*

$$U(x) = (x^2 - a^2)^2 \cdot \left(x^2 - (a+1)^2\right)$$

per un parametro $a \in \mathbb{R}^+$. *Si determinino tutte e sole le condizioni iniziali del tipo:*

$$(x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, v_0),$$

cui fanno seguito dei moti tali per cui esiste, finito, il

$$\lim_{t\to\infty} x(t; x_0, v_0)\ .$$

Infine, si determinino tutti i possibili valori di tale limite, quando esso è ben definito.

I punteggi, nel discutibile stile americano, saranno A,B,C e E, dove E significa che la soluzione non è ritenuta sufficiente. Alla fine si avranno tre punti se si sono ottenuti, almeno nei due terzi dei compiti, A; 2 punti se si sono ottenuti, almeno nei due terzi dei compiti, A o B; un punto se si sono ottenuti, almeno nei due terzi dei compiti, A, B o C.

Soluzione

Prima di tutto dobbiamo studiare la forma del potenziale.

$$U'(x) = 2x(x^2 - a^2)(2x^2 - 2(a+1)^2 + x^2 - a^2) = 2x(x^2 - a^2)(3x^2 - 2(a+1)^2 - a^2)$$

Dunque i punti critici del potenziale sono $0, \pm a$, e $\pm\sqrt{\frac{2}{3}(a+1)^2 + \frac{1}{3}a^2} =: \pm b$. Si noti che $b > a$. Chiaramente $x = 0$ è un minimo. Quindi $\pm a$ sono massimi e $\pm b$ minimi.

Per cominciare notiamo che se x_* è il limite allora deve essere $U'(x_*) = 0$. Infatti se $U'(x_*) = \gamma \neq 0$, allora esiste un intorno $I \ni x_*$ per cui $\inf_{x \in I} |U'(x)| \geqslant \gamma/2$. D'altro canto esiste $t_* > 0$ tale che $x(t) \in I$ per ogni $t > t_*$. Ma in tal caso

$$x(t) = x(t_*) + \int_{t_*}^{t} ds \int_{t_*}^{s} d\tau \ddot{x}(\tau) = x(t_*) - \int_{t_*}^{t} ds \int_{t_*}^{s} d\tau U'(x(\tau)).$$

Dunque

$$|x(t) - x(t_*)| \geqslant \int_{t_*}^{t} ds \int_{t_*}^{s} d\tau \frac{\gamma}{2} = \frac{(t - t_*)^2 \gamma}{4}.$$

Ma questo implica che $x(t)$ eventualmente esce da I, contrariamente all'ipotesi. Dunque i valori possibili del limite sono i punti di equilibrio.

Per quanto riguarda le condizioni iniziali abbiamo che gli unici moti asintotici ad un punto fisso accadono per punti di equilibrio instabile. Quindi le condizioni iniziali che danno luogo a moti asintotici sono $(0,0), (\pm b, 0)$ e tutte le condizioni iniziali che hanno la stessa energia di $(a, 0)$, ovvero

$$\frac{1}{2}v_0^2 + U(x_0) = 0.$$

Cioè $v_0 = \pm\sqrt{-2U(x_0)}$, questo significa che

$$x_0 \in \{x \in \mathbb{R} \,:\, U(x) \leqslant 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x| \leqslant a + 1\}.$$