

COMPITO PER IL 15/03/2024

Per ogni $\varepsilon > 0$, sia x_ε la soluzione dell'equazione differenziale

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & \sin \omega t \\ \cos \omega t & 0 \end{pmatrix} x(t) \\ x(0) &= (1, 0).\end{aligned}$$

Si cerchi di studiare $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ per ε sufficientemente piccolo.

Notate che non vi ho spiegato la teoria di Floquet per cui vi trovate nella situazione in cui si trovano comunemente i matematici: avete un problema la cui soluzione non è nel vostro repertorio di trucchi. Per risolverlo potete cercare di trovare risultati possibilmente rilevanti nella letteratura, ma, soprattutto, dovete pensare. Se non riuscite a risolverlo, non preoccupatevi, anche questa è la situazione comune dei matematici. L'importante è provarci. Ogni risultato, per quanto parziale, è apprezzato. Non sono invece apprezzati argomenti fumosi, confusi e inutilmente verbosi. Buon divertimento.

I punteggi, nel discutibile stile americano, saranno A,B,C e E, dove E significa che la soluzione non è ritenuta sufficiente. Alla fine si avranno tre punti se si sono ottenuti, almeno nei due terzi dei compiti, A; 2 punti se si sono ottenuti, almeno nei due terzi dei compiti, A o B; un punto se si sono ottenuti, almeno nei due terzi dei compiti, A, B o C.

Soluzione

Poichè l'equazione è lineare la soluzione ha la forma $x(t) = X(t)x_0$, dove x_0 è la condizione iniziale, per qualche matrice $X(t)$. Si può facilmente verificare che

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \varepsilon A(t)X(t) \\ X(0) &= \mathbb{I},\end{aligned}$$

dove $A(s) = \begin{pmatrix} 0 & \sin \omega s \\ \cos \omega s & 0 \end{pmatrix}$. Si noti che A è periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Questo implica che, ponendo $\xi(t) = X(t+T)$ abbiamo

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \dot{X}(t+T) = \varepsilon A(t+T)X(t+T) = \varepsilon A(t)\xi(t) \\ \xi(0) &= X(T),\end{aligned}$$

Si può facilmente verificare che $X(t)X(T)$ è la soluzione di tale equazione. Dunque $X(t+T) = X(t)X(T)$. Supponiamo si possa scrivere

$$(1) \quad X(T) = e^{BT}$$

per qualche matrice B . Poniamo $Z(t) = X(t)e^{-Bt}$ allora

$$Z(t+T) = X(t+T)e^{-B(t+T)} = X(t)X(T)e^{-BT}e^{-Bt} = X(t)e^{-Bt} = Z(t).$$

Dunque possiamo scrivere $X(t) = Z(t)e^{Bt}$, dove la funzione Z è periodica di periodo T . Ne segue che il comportamento asintotico è determinato dalla sola matrice B . D'altro canto possiamo scrivere l'equazione in forma integrale come

$$X(t) = \mathbb{I} + \varepsilon \int_0^t A(s)X(s)ds$$

Iterando si ha

$$X(t) = \mathbb{I} + \varepsilon \int_0^t A(s)ds + \varepsilon^2 \int_0^t ds \int_0^s d\tau A(s)A(\tau)X(\tau) = \mathbb{I} + \varepsilon^2 \int_0^t ds \int_0^s d\tau A(s)A(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Ma allora $e^{BT} = \mathbb{I} + BT + \mathcal{O}(B^2)$ implica che $B = \varepsilon^2 \int_0^T ds \int_0^s d\tau A(s)A(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$. Si noti che

$$\begin{aligned}\int_0^T ds \int_0^s d\tau A(s)A(\tau) &= \begin{pmatrix} \int_0^T ds \int_0^s d\tau \sin \omega s \cos \omega \tau & 0 \\ 0 & \int_0^T ds \int_0^s d\tau \cos \omega s \sin \omega \tau \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \int_0^T ds \omega^{-1} \sin^2 \omega s & 0 \\ 0 & \int_0^T ds \omega^{-1} [\cos \omega s - \cos^2 \omega s] \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\omega^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Segue che

$$X(nT) = e^{BnT} = \begin{pmatrix} e^{\left[\frac{\varepsilon^2}{2\omega^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right]nT} & e^{\mathcal{O}(\varepsilon^3)nT} \\ e^{\mathcal{O}(\varepsilon^3)nT} & e^{-\left[\frac{\varepsilon^2}{2\omega^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right]nT} \end{pmatrix}$$

dunque $x(t) = X(t)(1,0) = (e^{\left[\frac{\varepsilon^2}{2\omega^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right]nT}, e^{\mathcal{O}(\varepsilon^3)nT})$ che tende a ∞ quando $n \rightarrow \infty$. Resta da dimostrare l'equazione (1).

Lemma 0.1. *Se $\|X - \mathbb{I}\| \leq \frac{1}{4}$ allora (1) ha un'unica soluzione.*

Questo lemma non è ottimale, ma anche raffinando la dimostrazione si otterrebbe comunque un risultato parziale: la (1) ha sempre soluzioni a patto che X non abbia autovalori nulli, ma per dimostrarlo occorre sviluppare un poco di teoria di funzioni analitiche di matrici.

Proof. Vogliamo risolvere l'equazione

$$X = e^B = \mathbb{1} + B + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B^k}{k!}.$$

ovvero

$$B = X - \mathbb{1} - B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{(k+2)!} := F(B)$$

Si noti che se $\|B\| \leq \alpha$, then

$$\|F(B)\| \leq \frac{1}{4} + \alpha^2 \frac{e^\alpha}{2}$$

e scegliendo $\alpha = \frac{1}{2}$, segue $\|F(B)\| \leq \frac{1}{2}$. Si ha quindi che l'insieme $\{B : \|B\| \leq \frac{1}{2}\}$ è invariante per F . Si controlli che F è una contrazione e l'esistenza di un punto fisso per F segue da un ben noto teorema. $\square$