Chapter 7

Moti in sistemi non inerziali

7.1 Cinematica

In questo capitolo vogliamo descrive il moto nello spazio (la descrizione sul piano è totalemente simile ma più semplice essendo un caso particolare del moto nello spazio).

Per prima cosa dobbiamo dire quale struttura matematica descrive lo spazio. Questa è un problema correntemente al centro della ricerca (sotto il nome generico di *quantum gravity*), ma se ci restringiamo alla meccanica classica si può assumere che lo spazio sia lo spazio Euclideo E_3. Uno spazio Euclideo è uno spazio affine[1] sui reali tale che lo spazio vettoriale associato è uno spazio vettoriale Euclideo.[2]

Nel caso caso di E_3 l'insieme dei punti è $\mathbb{R}^3$, visto come un insieme, e lo spazio vettoriale associato è $\mathbb{R}^3$ visto come uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare. Data questa situazione è quindi usuale dire che lo spazio è $\mathbb{R}^3$ lasciando vago se si tratta di uno sapzio affine o vettoriale. Noi seguiremo questa tradizione (che ha il vantaggio di semplificare grandemente la notazione), il lettore con minimo sforzo dovrebbe essere in grado di trasformare le nostre, ambigue, affermazioni su $\mathbb{R}^3$ in affermazioni precise su E_3 (anzi, è un ottimo esercizio).

Avendo specificato lo spazio astratto in cui avvengono i moti, occorre darne una verisone concreta che permetta di calcolare esplicitamente delle quantià. A questo scopo è utile introdurre il concetto di *sistema di riferimento*. Un sistema di riferimento è determinato da un punto (l'origine delle coordiante) e tre vettori ortogonali di norma 1 che determinano gli assi cartesiani (le coordiante).[3] Preso

[1] Ricordate che uno *spazio affine* è un insieme A (i punti dello spazio) assieme ad uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ (spazio vettoriale associato) che agise su A con una operazione $S : A \times \mathbb{V} \to A$, che designamo come $S(a, v) = a + v$, che ha le proprietà: $a + 0 = a$, $(a + v) + w = a + (v + w)$ e, per ogni $a \in A$, la funzione $T_a(v) = a + v$ è una funzione biunivoca da $\mathbb{V}$ ad A.

[2] Ricordate che uno *Spazio Euclideo* è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare. Se è completo si chiama anche *spazio di Hilbert*.

[3] I tre vettori formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, si potrebbero tranquillamente consid-

zero come origine e data la base standard $\{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, un punto $x \in \mathbb{R}^3$ si scrive come $\sum_{i=1}^3 x_i e_i$, dove le x_i sono le coordinate del vettore x. Possimo quindi dire che, nella base $\{e_1, e_2, e_3\}$ il vettore x si scrive come (x_1, x_2, x_3).[4]

Dato un altro sistema di riferimento con centro $O \in \mathbb{R}^3$ e assi determinati da $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ vogliamo descrivere i punti rispetto a questo nuovo sistema. Ovvero, dato x vogliamo scrivere

$$x = O + \sum_{i=1}^{3} z_i v_i$$

Chiaramene

$$z_i = \langle v_i, x - O \rangle,$$

e il vettore $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ rappresenta il punto x nel nuovo sistema di riferimento.

Esiste un interessante modo alternativo di descrivere quanto sopra: si consideri la matrice tre per tre $U \in M(3, \mathbb{R})$ da

$$U = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}. \tag{7.1.1}$$

Si noti che $Ue_i = v_i$ ovvero la matrice trasforma la base di un sistema di riferimento in un'altra. Quindi ogni nuova base può essere ottenuta come una straformazione linerare della base originaria. A questo punto domandiamoci: la U è una matrice qualsiasi? Visto che trasformiamo una base ortonormale in una base ortonormale, la risposta è certamente no. Quindi, che proprietà ha U? Lascia invariate le lunghezze egli angoli. Ovvero, per ogni due vettori $z, w \in \mathbb{R}^3$ abbiamo

$$\langle Uz, Uw \rangle = \langle z, w \rangle.$$

Che significa $U^T U = \mathbb{1}$. Il lettore può facilmente verificare che la matrice (7.1.1) soddisfa questa condizione. Le matrici che hanno questa propritò si chiamno *ortogonali* e si insicano con $O(3, \mathbb{R})$. Chiaramente ad ogni matrice ortogonale corrisponde un nuovo sistema di coordiante.

Si noti che $\mathbb{1} \in O(3, \mathbb{R})$ e se $U, V \in O(3, \mathbb{R})$ allora $UV \in O(3, \mathbb{R})$visto che

$$(UV)^T UV = V^T U^T UV = V^T V = \mathbb{1}.$$

Inoltre se $U \in O(3, \mathbb{R})$ allora $U^T \in O(3, \mathbb{R})$. Infatti,

$$(UU^T)^2 = UU^T UU^T = UU^T,$$

and since $\det(UU^T) = \det(U^T U) = \det(\mathbb{1}) = 1$, it follows that UU^T is invertible and, hence, multiplying the above by the inverse we have

$$\mathbb{1} = UU^T = (U^T)^T (U^T).$$

erare basi non ortonormali, ma sarebbe una complicazione inutile per i nostri scopi.

[4]Per evitare confusione si dovrebbe usare una notazione diversa per il vettore x, che ha un significato indipendente dalle coordinate e il vettore $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ delle sue coordinate che, ovviamente, dipende dalla base usata. Tuttavia, per non appesantire la notazione, se la base è specificata chiaramente, scriveremo spesso $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Si noti che questo implica che $U^{-1} = U^T$ e quindi se $U \in O(3,\mathbb{R})$ allora $U^{-1} \in O(3,\mathbb{R})$. In altre parole $O(3,\mathbb{R})$ e un *gruppo moltiplicativo* di matrici. Visto che $\det(U)^2 = \det(U^T U) = 1$, ne segue che $\det(U) \in \{\pm 1\}$. Per semplictà consideriamo solo sistemi di riferimento con lo stesso orientamento, allora sono sescritti dal gruppo speciale $SO(3,\mathbb{R}) = \{U \in O(3,\mathbb{R}) \ : \ \det(U) = 1\}$. Ne segue che un nuovo sistema di riferimento è descritto univocamente da (O, U) con $O \in \mathbb{R}^3$ e $U \in SO(3,\mathbb{R})$. Per informazioni più dettagliate sulle proprietà di $SO(3,\mathbb{R})$ e l'algebra di Lie associata si veda l'Appendice A.

Se ora consideriamo un sistema O, U con assi $v_i = U e_i$, e vogliamo descrivere il vettore x in queste nuove coordinate, allora dobbiamo scrivere

$$x = O + \sum_{i=1}^{3} z_i v_i$$

dove le z_i sono le coordiante di x nella nuova base.

Esercizio 7.1.1. *Si verifichi che*

$$z_j = \sum_{k=1}^{3} U_{k,j} (x - O)_k = \langle e_j, U^T (x - O) \rangle$$

dove $U_{k,j} = \langle e_k, U e_j \rangle$, $(x - O)_k = \langle e_k, x - O \rangle$.

Possiamo quindi caratterizzare un sistema di riferimento mobile come $(O(t), U(t))$. Se z è la posizione nel sistema di riferimento mobile allora $x = O + Uz$ e

$$\dot{x} = \dot{O} + \dot{U} z + U \dot{z}.$$

Dalla Appendice A sappiamo che $B = \dot{U} U^T$ è una matrice antisimmetrica. Sia $\tilde{\omega}$ tale che $a(\tilde{\omega}) = B$, allora

$$\dot{x} = \dot{O} + \tilde{\omega} \wedge Uz + U \dot{z}.$$

Quindi[5]

$$\ddot{x} = \ddot{O} + \dot{\tilde{\omega}} \wedge Uz + \tilde{\omega} \wedge (\tilde{\omega} \wedge Uz) + 2\tilde{\omega} \wedge U\dot{z} + U\ddot{z},$$

Dunque, ponendo $\omega = U^T \tilde{\omega}$ si ha

$$U^T \ddot{x} = U^T \ddot{O} + \dot{\omega} \wedge z + \omega \wedge (\omega \wedge z) + 2\omega \wedge \dot{z} + \ddot{z}.$$

Dunque, poichè le equazioni del moto nel sistema inerziale sono $m\ddot{x} = f(x)$, ponendo $f_*(z) = U^T f(O + Uz)$ si ha che le equazioni del moto nel sistema non inerziale sono

$$m\ddot{z} = f_*(z) - U^T \ddot{O} - \dot{\omega} \wedge z - \omega \wedge (\omega \wedge z) - 2\omega \wedge \dot{z}.$$

Dunque abbiamo la presenza di forze apparenti.

[5] Note that the brackets are important as the vector product it is not associative!