

## Chapter 5

# Moti unidimensionali

Cominciamo lo studio partendo dal caso più semplice possibile: i moti unidimensionali. Ne approfitteremo per discutere alcuni problemi la cui trattazione in dimensioni maggiori pone problemi il cui studio esula dai presenti scopi.

### 5.1 Moti unidimensionali sotto l'influenza della gravità

Consideriamo due particelle di massa  $m, M$ , rispettivamente, che si muovono su di una retta sotto l'influenza del potenziale gravitazionale  $U(x-y) = -G \frac{mM}{|x-y|}$ , dove  $x$  è la posizione della prima particella e  $y$  quella della seconda.<sup>1</sup> Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -U'(x-y) \\ M\ddot{y} &= U'(x-y).\end{aligned}$$

Ne segue che il centro di massa  $z = \frac{mx+My}{m+M}$  soddisfa  $\ddot{z} = 0$ , ovvero si muove di moto rettilineo uniforme. Sembra quindi naturale introdurre  $\xi = x - y$ . Si noti che  $z, \xi$  determinano univocamente  $x, y$  e quindi possono essere usate come nuove coordinate. Come abbiamo detto il moto del centro di massa è rettilineo uniforme, d'altro canto

$$\ddot{\xi} = -(M^{-1} + m^{-1})U'(\xi).$$

Ovvero, ponendo  $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ ,

$$\mu\ddot{\xi} = -U'(\xi),$$

---

<sup>1</sup>Questo scenario non è consistente con quello che sappiamo della gravità. Se il mondo fosse unidimensionale le nostre teorie gravitazionali predirebbero una legge di attrazione, tuttavia non è chiaro come verificare questa predizione. Si tratta quindi di un esempio astratto, sebbene, come vedremo poi, lo si possa giustificare assumendo che il moto si svolge in presenza di vincoli esterni.

abbiamo dunque ridotto il problema di due particelle alla equazione per una particella. Supponiamo che  $\xi_* := \xi(0) < 0$  e  $\dot{\xi}(0) > 0$ , allora  $\xi$  si muove verso zero dove il potenziale ha una singolarità. Questo è chiaramente problematico perchè non è chiaro cosa significhino le nostre equazioni in zero. Esistono vari modi di trattare questo problema il più semplice è di dire che non abbiamo nessuna ragione di credere che la legge gravitazionale sia corretta per distanze arbitrariamente piccole, infatti non lo è. Possiamo quindi pensare che sia valida fino ad una distanza  $\varepsilon$  e che per distanze minori sia determinata da una qualche teoria più sofisticata in cui il potenziale non diverge. In mancanza di questa teoria più sofisticata (che poi sarebbe la teoria della gravità generale, o, meglio, della gravità quantistica, teoria per il momento inesistente) ci accontentiamo di un modello super stupido, ovvero supponiamo che il potenziale sia

$$U_\varepsilon(\xi) = -G \frac{mM}{\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}.$$

Chiaramente  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_\varepsilon(\xi) = U(\xi)$  e  $U_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty$  per cui genera una equazione differenziale che soddisfa tutte le ipotesi del capitolo precedente. Siccome non sappiamo quanto il potenziale gravitazionale vero differisce da quello Newtoniano, il nostro modellino è sensato solo se il moto ottenuto dipende molto poco da  $\varepsilon$ . Per sapere se questo è il caso dobbiamo studiare il comportamento dell'equazione

$$\mu \ddot{\xi} = -U'_\varepsilon(\xi), \quad (5.1.1)$$

per  $\varepsilon$  piccoli. Moltiplicando per  $\dot{\xi}$  e integrando nel tempo otteniamo

$$\frac{\mu}{2} \dot{\xi}^2(t) + U_\varepsilon(x(t)) = \frac{\mu}{2} \dot{\xi}^2(0) + U_\varepsilon(x(0)) =: E$$

Che implica

$$\dot{\xi}(t) = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_\varepsilon(\xi(t)))}$$

dove abbiamo scelto il segno positivo perchè al tempo zero la velocità è assunta positiva e quindi, per continuità, lo sarà per tempi piccoli. Si noti che, per ogni  $|\xi| \leq |\xi_*|$ ,

$$E - U_\varepsilon(\xi) \geq E - U_\varepsilon(\xi_*) = \frac{\mu}{2} \dot{\xi}(0)^2 := \frac{\mu}{2} v_0^2 > 0. \quad (5.1.2)$$

D'altra parte, se  $E > 0$ , allora  $E - U_\varepsilon(\xi) \geq -U_\varepsilon$ . Mentre se  $E < 0$ , allora esiste  $\beta \in (0, 1)$  tale che  $E - U_\varepsilon(\xi_*) \geq -\beta U_\varepsilon(\xi_*)$ , per ogni  $\varepsilon \geq 0$ , da cui

$$E - U_\varepsilon(\xi) \geq -\beta U_\varepsilon(\xi_*). \quad (5.1.3)$$

Dunque in questo intervallo la radice è sempre positiva e possiamo scrivere

$$\begin{aligned} t &= \int_0^t \frac{\dot{\xi}(s)}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_\varepsilon(\xi(s)))}} ds = \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \left[ \frac{2}{\mu}(E - U_\varepsilon(x)) \right]^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \left[ \frac{2}{\mu}(E - U_0(x)) \right]^{-\frac{1}{2}} dx \\ &\quad + \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \left\{ \left[ \frac{2}{\mu}(E - U_\varepsilon(x)) \right]^{-\frac{1}{2}} - \left[ \frac{2}{\mu}(E - U_0(x)) \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} dx. \end{aligned}$$

Stimiamo ora il termine nell'ultima riga

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \left\{ \left[ \frac{2}{\mu}(E - U_\varepsilon(x)) \right]^{-\frac{1}{2}} - \left[ \frac{2}{\mu}(E - U_0(x)) \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \frac{\left| \left[ \frac{2}{\mu}(E - U_0(x)) \right]^{\frac{1}{2}} - \left[ \frac{2}{\mu}(E - U_\varepsilon(x)) \right]^{\frac{1}{2}} \right|}{\left[ \frac{2}{\mu}(E - U_\varepsilon(x)) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{\mu}(E - U_0(x)) \right]^{\frac{1}{2}}} dx. \end{aligned}$$

Per continuare stimiamo il denominatore usando (5.1.3) e razionalizziamo ottenendo

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \frac{\left| \frac{2}{\mu}(E - U_0(x)) - \frac{2}{\mu}(E - U_\varepsilon(x)) \right|}{v_0 \left[ -\frac{2\beta}{\mu}U_0(x) \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[ \frac{2}{\mu}(E - U_0(x)) \right]^{\frac{1}{2}} + [(E - U_\varepsilon(x))]^{\frac{1}{2}} \right\}} dx \\ &\leq \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \frac{U_0(x) - U_\varepsilon(x)}{v_0 [(E - U_0(x))]^{\frac{1}{2}} [-\beta U_0(x)]^{\frac{1}{2}}} dx \leq \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \frac{U_0(x) - U_\varepsilon(x)}{-v_0 \beta U_0(x)} dx \\ &= \frac{1}{\beta v_0} \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \frac{(x^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{x^2}}{(x^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} dx \\ &\leq \frac{1}{v_0 \beta} \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \frac{\varepsilon}{(x^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} [(x^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{x^2}]} dx \\ &\leq \varepsilon \frac{1}{\beta v_0} \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \frac{1}{x^2 + \varepsilon} dx \leq \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{\beta v_0} \int_{\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \xi_*}^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \xi_\varepsilon(t)} \frac{1}{y^2 + 1} dy \\ &\leq C \sqrt{\varepsilon}, \end{aligned}$$

per qualche costante  $C$ .

Ne segue che, chiamando  $\xi_\varepsilon(t)$  la soluzione di (5.1.1), per  $\dot{\xi}_\varepsilon(t) \geq 0$  si ha

$$t + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) = \frac{\mu}{2} \int_{\xi_*}^{\xi_\varepsilon(t)} \left[ \frac{|x|}{E|x| + GMm} \right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

Si noti che se ci limitiamo a vedere il moto in un intervallo limitato  $[-L, L]$  allora, per  $\varepsilon \geq \varepsilon' > 0$  piccolo a sufficienza e per una opportuna costante  $C > 0$ , abbiamo

$$\begin{aligned} C\sqrt{\varepsilon} &\geq \frac{\mu}{2} \int_{\xi_\varepsilon(s)}^{\xi_{\varepsilon'}(t)} \left[ \frac{|x|}{EL + GMm} \right]^{\frac{1}{2}} dx \\ &\geq \frac{\mu}{3\sqrt{EL + GMm}} \left| |\xi_\varepsilon(t)|^{\frac{3}{2}} - |\xi_{\varepsilon'}(t)|^{\frac{3}{2}} \right|. \end{aligned}$$

Questo mostra che  $\xi_\varepsilon$  è una successione di Cauchy e quindi ha limite. Detto  $\xi$  il limite si ha che

$$t = \frac{\mu}{2} \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \left[ \frac{|x|}{E|x| + GMm} \right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

Questo implica che esiste il limite del moto per  $\varepsilon$  che tende a zero e che (nel modello di regolarizzazione che abbiamo fatto) le due particelle si attraversano senza problemi.

In altre parole abbiamo visto che la singolarità nel campo differenziale non impedisce di continuare le soluzioni per un tempo arbitrario a patto di supporre (questo pure è un modello del fenomeno) che le soluzioni fisiche sono quelle che si ottengono con il processo di regolarizzazione descritto. Si noti che il modello di regolarizzazione ha conseguenze osservabili, vedremo in seguito che lo stesso problema trattato in tre dimensioni da un predizione completamente diversa.

## 5.2 Collisioni elastiche

Consideriamo due particelle di massa  $m$  che interagiscono con un potenziale  $U_\lambda(x) = mU(\lambda x)$  dove  $U \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$  è una funzione tale che  $U(x) = 0$  per  $|x| \geq 1$  e  $U(x) = 1$  per  $|x| \leq 1/2$  e  $|U'(x)| > 0$  per ogni  $|x| \in (1/2, 1)$ .

Assumendo che le due particelle abbiano condizioni iniziali  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ , vogliamo capire come avviene il moto. Per  $\lambda \gg 1$  questo sembra un modello ragionevole di un urto tra due particelle di massa uguale di cui una è ferma. Lo scopo di questa sezione è di studiare il limite per  $\lambda \rightarrow \infty$  e vedere se questo ci suggerisce come trattare, in generale, l'urto tra particelle. Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\partial_x U_\lambda(x - y) = -\lambda m U'(\lambda(x - y)) \\ m\ddot{y} &= -\partial_y U_\lambda(x - y) = \lambda m U'(\lambda(x - y)). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che il centro di massa  $X = \frac{1}{2}(x + y)$  si muove come di moto rettilineo uniforme, quindi  $X(t) = \frac{1}{2}(t + 1)$ . Mentre  $\xi_\lambda = x - y$  soddisfa l'equazione

$$\ddot{\xi}_\lambda = -2\lambda U'(\lambda \xi_\lambda).$$

Poichè per  $\xi_\lambda < -\lambda^{-1}$  la forza è nulla abbiamo che  $\xi_\lambda(t) = -1 + t$  per tutti i  $t \leq 1 - \lambda^{-1} =: t_0$ . Per  $t = s + t_0$ ,  $s \geq 0$  abbiamo

$$\frac{1}{2} \dot{\xi}_\lambda((t_0 + s))^2 - \frac{1}{2} = -2U(\lambda \xi_\lambda(t + s)),$$

ovvero, fino a che  $\dot{\xi}_\lambda \geq 0$ ,

$$\dot{\xi}_\lambda(t_0 + s) = \sqrt{1 - 4U(\lambda\xi_\lambda(t_0 + s))}.$$

Siano  $\xi_+ \in [-1, 0]$  e  $\xi_- \in [-1, \xi]$  tali che  $U(\xi_+) = \frac{1}{4}$  e  $U(\xi_-) = \frac{1}{8}$ , allora

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^{t_0+s} \frac{\dot{\xi}_\lambda(t_0 + s)}{\sqrt{1 - 4U(\lambda\xi_\lambda(t_0 + s))}} ds = \int_{-\lambda^{-1}}^{\xi_\lambda(t_0+s)} \frac{1}{\sqrt{1 - 4U(\lambda y)}} dy \\ &= \lambda^{-1} \int_{-1}^{\lambda\xi_\lambda(t_0+s)} \frac{1}{\sqrt{1 - 4U(y)}} dy \leq \lambda^{-1} \int_{-1}^{\xi_+} \frac{1}{\sqrt{1 - 4U(y)}} dy \\ &= \lambda^{-1} \int_{-1}^{\xi_+} \frac{1}{2\sqrt{U(\xi_+) - U(y)}} dy \leq \lambda^{-1} \left[ \sqrt{2} + \int_{\xi_-}^{\xi_+} \frac{1}{2\sqrt{U(\xi_+) - U(y)}} dy \right] \end{aligned}$$

Per concludere notiamo che per ipotesi  $\alpha = \inf_{y \in [\xi_-, \xi_+]} U'(y) > 0$ , quindi  $U(\xi_+) - U(y) = \int_y^{\xi_+} U'(y) dy \geq (\xi_+ - y)\alpha$ . Da cui segue

$$\begin{aligned} s &\leq \lambda^{-1} \left[ \sqrt{2} + \int_{\xi_-}^{\xi_+} \frac{1}{2\sqrt{\alpha(\xi_+ - y)}} dy \right] \leq \lambda^{-1} \left[ \sqrt{2} + \frac{\sqrt{\xi_+ - \xi_-}}{\sqrt{\alpha}} \right] \\ &\leq \lambda^{-1} \left[ \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right]. \end{aligned}$$

Questo implica che dopo un tempo  $s_\lambda \leq \lambda^{-1} \left[ \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right]$  la particella inverte il moto e quindi dopo un tempo  $2s_\lambda$  si ha  $\xi_\lambda(t_0 + 2s_\lambda) = -\lambda$  e  $\dot{\xi}_\lambda(t_0 + 2s_\lambda) = -1$ . Quindi per i tempi successivi si ha  $\xi_\lambda(t) = -\lambda - (t - t_0 - 2s_\lambda)$ . Ne segue che

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \xi_\lambda(t) = \begin{cases} -1 + t & \text{per } t \leq 1 \\ 1 - t & \text{per } t \geq 1. \end{cases}$$

Ovvero, nel limite abbiamo un moto uniforme fino a zero dove la velocità cambia istantaneamente di segno: un *collisione elastica* appunto.

**Esercizio 5.2.1.** *Si mostri che il moto limite è determinato completamente dalla conservazione del momento totale, della energia e dal fatto che le particelle non possono attraversarsi.*

**Esercizio 5.2.2.** *Due particelle puntiformi, rispettivamente di massa  $M$  e  $m$ ,  $M > m$ , si muovono su di una retta orizzontale in assenza di forze con condizioni iniziali  $X(0) = -1$ ,  $\dot{X}(0) = 1$  e  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , rispettivamente. Se ne descriva il moto tenendo conto che la loro eventuale collisione è elastica (ovvero durante la collisione si conservano sia il momento totale che l'energia totale).*

### 5.3 Attrito Viscoso

L'attrito è una cosa con cui ci confrontiamo tutti i giorni, ma non è una forza fondamentale della natura, quindi da dove emerge? Nel seguito discuteremo alcune semplici situazioni in cui l'attrito emerge naturalmente dall'interazione con l'ambiente in cui la particella si muove.

#### 5.3.1 Collisioni elastiche con un gas a riposo

Supponiamo che nei punti  $k\varepsilon$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , ci siano particelle di massa  $\gamma\varepsilon$  a riposo. Tali particelle non interagiscono tra loro, ma possono collidere con una particella di massa  $m$ . Si supponga che quest'ultima particella abbia condizioni iniziali  $x(0) = 1$  e  $\dot{x}(0) = v > 0$ .

Il nostro obiettivo è quello di descrivere il moto  $x_\varepsilon(t)$  di una particella di questo tipo nel limite di  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Si noti che il Problema 5.2.2 implica che se al tempo  $t$  si ha una collisione la velocità della particella passa da  $\dot{x}_\varepsilon(t)$  a  $\frac{m-\varepsilon\gamma}{m+\varepsilon\gamma}\dot{x}_\varepsilon(t)$ , mentre la particella leggera dopo la collisione avrà velocità  $\frac{2m}{m+\varepsilon\gamma}\dot{x}_\varepsilon(t)$  e quindi, muovendosi più velocemente della particella pesante, non colliderà più con essa. Questo implica che dopo  $n$  collisioni la velocità sarà

$$(1 - 2n\varepsilon\gamma m^{-1})\dot{x}_\varepsilon(t) \leq \left[ \frac{1 - \varepsilon\gamma m^{-1}}{1 + \varepsilon\gamma m^{-1}} \right]^n \dot{x}_\varepsilon(t) \leq \dot{x}_\varepsilon(t).$$

Ne segue che in un tempo  $h \gg \varepsilon$  il numero di collisioni che si hanno dopo il tempo  $t$  è inferiore a  $\dot{x}_\varepsilon(t)\varepsilon^{-1}h$ . Ne segue che

$$\dot{x}_\varepsilon(t+h) \geq (1 - 2m^{-1}\dot{x}_\varepsilon(t)h)\dot{x}_\varepsilon(t).$$

Quindi, tra  $t$  e  $t+h$  avvengono almeno  $(1 - 2m^{-1}\dot{x}_\varepsilon(t)h)\dot{x}_\varepsilon(t)\varepsilon^{-1}h$  collisioni. Per cui

$$[(1 - 2\gamma m^{-1}(1 - 2m^{-1}\dot{x}_\varepsilon(t)h)\dot{x}_\varepsilon(t)h)]\dot{x}_\varepsilon(t) \geq \dot{x}_\varepsilon(t+h).$$

Ne segue che

$$-2m^{-1}\gamma\dot{x}_\varepsilon(t)^2 \leq \frac{\dot{x}_\varepsilon(t+h) - \dot{x}_\varepsilon(t)}{h} \leq -2\gamma m^{-1}(1 - 2m^{-1}\dot{x}_\varepsilon(t)h)\dot{x}_\varepsilon(t)^2.$$

Si noti che  $\dot{x}(t)$  è una funzione costante a tratti: ogni volta che la particella pesante collide con una particella piccola si ha un salto nella velocità. Se  $t_j$  sono i tempi a cui avviene la collisione allora  $t_{j+1} - t_j \sim \frac{\varepsilon}{\dot{x}_\varepsilon(t_j)}$ , è quindi possibile definire la funzione  $\xi_\varepsilon(t)$  tale che, per  $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ,  $\xi_\varepsilon(t) = \dot{x}_\varepsilon(t_j) \frac{t_{j+1}-t}{t_{j+1}-t_j} + \dot{x}_\varepsilon(t_{j+1}) \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}$ , dove  $\dot{x}_\varepsilon(t_k)$  è il valore della velocità subito prima della collisione.

**Esercizio 5.3.1.** *Si verifichi che*

$$\begin{aligned} \|\xi_\varepsilon(t) - \dot{x}_\varepsilon(t)\|_\infty &\leq C\varepsilon \\ \left| \frac{\xi_\varepsilon(t+h) - \xi_\varepsilon(t)}{h} \right| &\leq C. \end{aligned}$$

per qualche costante  $C > 0$ .

Ne segue che, per Ascoli-Arzelà, esistono sotto successioni convergenti  $\xi_{\varepsilon_j}$ . Detto  $\xi_*(t)$  il limite di una di queste sottosuccessioni si ha, per ogni  $h > 0$  e  $T > 0$  che, per ogni  $t \leq T$ ,

$$\begin{aligned} -2m^{-1}\gamma\xi_*(t)^2 &\leq \frac{\xi_*(t+h) - \xi_*(t)}{h} \leq -2\gamma m^{-1}(1 - 2m^{-1}\xi_*(t)h)\xi_*(t)^2 \\ \xi_*(0) &= v. \end{aligned}$$

Prendendo il limite  $h \rightarrow 0$  si ha

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_*(t) &= -2m^{-1}\gamma\xi_*(t)^2 \\ \xi_*(0) &= v. \end{aligned}$$

Poichè questa equazione ha un'unica soluzione, ne segue che tutti i punti di accumulazione sono uguali e quindi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{x}_\varepsilon = \dot{\xi}_*.$$

Ovvero, tenendo conto che il caso in cui  $v < 0$  è uguale ma con un segno cambiato, il moto limite soddisfa l'equazione

$$m\ddot{x} = -\gamma|\dot{x}|\dot{x}.$$

### 5.3.2 Interazioni con un potenziale (viaggio in un gas)

Supponiamo di trovarci su di una retta e che per ogni  $k \in \mathbb{N}$  ci sia una particella di massa  $\gamma\varepsilon$  nel punto  $\varepsilon k + \varepsilon/2$ . Tali particelle non interagiscono tra loro, ma possono interagire con una particella di massa 1 e posizione  $X \in \mathbb{R}$  attraverso un potenziale  $V_{k,\varepsilon}(x_k, X) = \varepsilon V(\varepsilon^{-1}(X - \varepsilon k - \varepsilon/2 - x_k))$ , dove  $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$  ha supporto nell'intervallo  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ .<sup>2</sup> Si supponga che le condizioni iniziali siano  $X(0) = 0$  e  $\dot{X}(0) = v > 1$  e  $x_k(0) = \dot{x}_k(0) = 0$ . Si supponga inoltre che  $v^2 \geq 4\gamma^{-1}\|V'\|_\infty$ .

Il nostro obiettivo è quello di descrivere il moto della particella  $X(t)$  nel limite di  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} \gamma\varepsilon\ddot{x}_k &= V'(\varepsilon^{-1}(X - \varepsilon k - \varepsilon/2 - x_k)) \\ \ddot{X} &= -\sum_{k \in \mathbb{Z}} V'(\varepsilon^{-1}(X - \varepsilon k - \varepsilon/2 - x_k)) \\ X(0) &= 0 ; \dot{X}(0) = v > 0 \\ x_k(0) &= \dot{x}_k(0) = 0. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Si noti che la somma infinita della seconda riga al tempo zero contiene un solo termine non nullo e quindi è ben definita, tuttavia non è ovvio che lo sia a tempi positivi. Infatti abbiamo scritto un numero infinito di equazioni differenziali e

<sup>2</sup>Questo significa che stiamo considerando un potenziale repulsivo. Si tratta di una semplificazione non necessaria, potenziali generali si possono trattare nello stesso modo.

quindi non è ovvio che abbiamo un senso e che la soluzione esista. Tuttavia la prima equazione implica che  $|\ddot{x}_k| \leq C\varepsilon^{-1}$  per una qualche costante  $C > 0$ , dunque  $|x_k| \leq \frac{C}{\varepsilon}t^2$  per tutti i tempi e questo significa che la somma nella seconda riga delle (5.3.1) può avere solo un numero finito di termini non nulli per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , dunque le equazioni sono ben poste. Per ottenere una migliore comprensione del problema è opportuno introdurre l'energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{X}^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{\gamma\varepsilon}{2}\dot{x}_k^2 + \varepsilon V(\varepsilon^{-1}(X - \varepsilon k - x_k)) \right]$$

Si noti che  $E(0) = \frac{1}{2}v^2 + \varepsilon V(0)$ . Inoltre, differenziando, si ottiene  $\frac{d}{dt}E = 0$ . Moltiplicando la prima delle (5.3.1) per  $\dot{x}_k$  e integrando si ottiene

$$\gamma\varepsilon\dot{x}_k^2(t) = \int_0^t V'(\varepsilon^{-1}(X(s) - \varepsilon k - \varepsilon/2 - x_k(s)))\dot{x}_k(s)ds. \quad (5.3.2)$$

Usando la disuguaglianza di Schwarz si ha

$$\frac{\gamma\varepsilon}{2}\dot{x}_k^2(t) \leq \sqrt{\|V'\|_\infty^2} t \sqrt{\int_0^t \dot{x}_k(s)^2 ds}.$$

Chiamando  $e_k(t) = \frac{\gamma\varepsilon}{2}\dot{x}_k^2(t)$  otteniamo

$$e_k(t) \leq \|V'\|_\infty \sqrt{\int_0^t e_k(s) ds} \sqrt{2\gamma^{-1}t\varepsilon^{-1}}.$$

Ponendo  $\bar{e}(t) = \sup_{s \leq t} e_k(s)$ , si ha

$$\bar{e}(t) \leq \|V'\|_\infty \sqrt{\bar{e}(t)} \sqrt{2\gamma^{-1}\varepsilon^{-1}t}$$

ovvero

$$\bar{e}(t) \leq \|V'\|_\infty^2 2\gamma^{-1}\varepsilon^{-1}t^2.$$

Ne segue che, ponendo  $C = \frac{4\|V'\|_\infty^2}{\gamma^2} = \delta^2 v^2$ ,

$$\dot{x}_k(t)^2 \leq C\varepsilon^{-2}t^2, \quad (5.3.3)$$

e quindi  $|x_k(t)| \leq \frac{1}{2}C^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{-1}t^2$ . Quindi se  $t \leq \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2C^{\frac{1}{4}}}$ , allora  $|x_k| \leq \frac{\varepsilon}{4}$  e quindi nessuna particella esce dall'intervallo  $\varepsilon(k + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4})$  in cui si trovava al tempo zero. Quindi, per tali tempi,

$$\begin{aligned} \gamma\varepsilon\ddot{x}_0 &= V'(\varepsilon^{-1}(X - \varepsilon/2 - x_0)) \\ \ddot{X} &= -V'(\varepsilon^{-1}(X - \varepsilon/2 - x_0)) \end{aligned}$$

Dunque  $\gamma\varepsilon\ddot{x}_0 + \ddot{X} = 0$ , ovvero  $\gamma\varepsilon\dot{x}_0 + \dot{X} = v$  e, ponendo  $\xi = X - x_0$ ,

$$\ddot{\xi} = -(1 + \gamma^{-1}\varepsilon^{-1})V'(\varepsilon^{-1}(\xi - \varepsilon/2)).$$

Abbiamo quindi la quantità conservata (energia)

$$\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + (\varepsilon + \gamma^{-1})V(\varepsilon^{-1}(\xi - \varepsilon/2)) = \frac{v^2}{2}.$$

Questo significa che per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo il moto di  $\xi$  supera il potenziale e raggiunge il punto  $\varepsilon/2$  ad un tempo  $t_\varepsilon$  proporsionale a  $\varepsilon$ . Ma questo significa che al tempo  $t_\varepsilon$  si ha  $X(t_\varepsilon) = v$  e  $\dot{x}_0 = 0$ . Ovvero  $X(t)$  viaggia con una velocità che oscilla ma non diminuisce mai. Dunque non si ha un attrito.

### 5.3.3 Interazioni con un potenziale (su un reticolo)

Abbiamo visto che scorrere su un gas con potenziale non produce un attrito ma solo una diminuzione della velocità effettiva. Questo dipende dalla conservazione del momento. Per distruggerla possiamo considerare il caso il cui le particelle sono fissata ad una posizione da una molla (potenziale quadratico).

$$\begin{aligned} \gamma\varepsilon\ddot{x}_k &= -K\varepsilon^{-1}x_k + V'(\varepsilon^{-1}(X - \varepsilon k - \varepsilon/2 - x_k)) \\ \ddot{X} &= -\sum_{k \in \mathbb{Z}} V'(\varepsilon^{-1}(X - \varepsilon k - \varepsilon/2 - x_k)) \\ X(0) &= 0; \dot{X}(0) = v > 0 \\ x_k(0) &= \dot{x}_k(0) = 0. \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Di nuovo una analisi simile a quella della sezione precedente mostra che possiamo trattare una particella per volta. Ovvero dobbiamo studiare

$$\begin{aligned} \gamma\varepsilon\ddot{x}_0 &= -K\varepsilon^{-1}x_0 + V'(\varepsilon^{-1}(X - \varepsilon/2 - x_0)) \\ \ddot{X} &= -V'(\varepsilon^{-1}(X - \varepsilon/2 - x_0)) \\ X(0) &= 0; \dot{X}(0) = v > 0 \\ x_0(0) &= \dot{x}_0(0) = 0. \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Per semplicità saremo interessati a  $v$  grandi. Integrando abbiamo

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= -\frac{K}{\gamma}\varepsilon^{-2} \int_0^t x_0(s)ds + \frac{1}{\gamma\varepsilon} \int_0^t V'(\varepsilon^{-1}(X(s) - \varepsilon/2 - x_0(s)))ds \\ \dot{X}(t) &= v - \int_0^t V'(\varepsilon^{-1}(X(s) - \varepsilon/2 - x_0(s)))ds \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Se ci limitiamo a tempi per cui  $t \leq c\varepsilon$ , per una costante  $c$  che sceglieremo poi, e  $|x_0(s)| \leq c\varepsilon$ , per tutti gli  $s \leq t$ , allora  $|\dot{X}(s) - v| \leq \|V'\|_\infty s$ , e quindi  $|X(s) - \frac{\varepsilon}{2} - vs| \leq \frac{\|V'\|_\infty}{2} s^2$ . Ne segue che

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= v - \int_0^t V'(\varepsilon^{-1}(vs - x_0(s)))ds + \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}t^3) \\ \frac{1}{2}\dot{x}_0(t)^2 + \frac{K}{\gamma}\varepsilon^{-2}x_0(t)^2 &= \gamma^{-1}\varepsilon^{-1} \int_0^t V'(\varepsilon^{-1}(X(s) - \varepsilon/2 - x_0(s)))\dot{x}_0(s)ds \end{aligned}$$

Ponendo  $a = \sup_{s \leq t} |x_0(s)|$  si ha

$$\frac{1}{2}a \leq \gamma^{-1}\varepsilon^{-1}t\|V'\|_\infty \leq c\gamma^{-1}\|V'\|_\infty.$$

Quindi

$$|x_0(t)| \leq c\gamma^{-1}\|V'\|_\infty t \leq t \leq c\varepsilon$$

a patto di scegliere  $c \leq \gamma\|V'\|_\infty^{-1}$ . Ma allora  $vt - x_0(t) \geq (v-1)t \geq \varepsilon$  per  $t \geq (v-1)^{-1}\varepsilon$ , se volgiamo che questo succeda (ovvero che le particelle cessino di interagire) prima del tempo  $c\varepsilon$  allora deve essere  $(v-1)^{-1} \leq c$ , cora possibile se  $\gamma\|V'\|_\infty^{-1}(v-1) \geq 1$ , cosa che accade per  $v$  sufficientemente grande. Riassumendo, ponendo  $c = (v-1)^{-1}$  e  $\delta = \gamma^{-1}\|V'\|_\infty(v-1)^{-1} = \mathcal{O}(v^{-1})$  abbiamo  $x_0(t) \leq \delta t$  e per  $v$  grande  $\delta$  è piccolo e possiamo quindi espandere le nostre formule in  $\delta$ .

Dalla prima delle (5.3.6) abbiamo quindi

$$\dot{x}_0(t) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2}\delta t^2) + \frac{1}{\gamma\varepsilon} \int_0^t V'(\varepsilon^{-1}vs)ds = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2}\delta t^2) + \frac{1}{\gamma v} V(\varepsilon^{-1}vt)$$

da cui

$$x_0(t) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2}\delta t^3) + \frac{1}{\gamma v} \int_0^t V(\varepsilon^{-1}vs)ds = \mathcal{O}(\delta^4\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\gamma v^2} \int_0^{\varepsilon^{-1}vt} V(s)ds$$

Ne segue che, per  $t = c\varepsilon$ , si ha

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \mathcal{O}(v^{-4}\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\gamma v^2} \int_0^1 V(s)ds \\ \dot{x}_0(t) &= \mathcal{O}(v^{-3}). \end{aligned}$$

Ne segue che la particella leggera ha acquisito l'energia

$$\mathcal{O}(v^{-6}\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2\gamma^2 v^4} \left[ \int_0^1 V(s)ds \right]$$

Dunque

$$\frac{1}{2}\dot{X}(t)^2 = \frac{1}{2}v^2 + \mathcal{O}(v^{-6}\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2\gamma^2 v^4} \left[ \int_0^1 V(s)ds \right]$$

Ovvero,

$$\dot{X}(t) = v - \frac{\varepsilon}{2\gamma^2 v^5} \left[ \int_0^1 V(s)ds \right] + \mathcal{O}(v^{-7}\varepsilon). \quad (5.3.7)$$

Con questa formula possiamo finalmente ottenere il risultato cercato. Poniamo per comodità

$$\Gamma := \frac{\int_0^1 V(s)ds}{2\gamma^2}.$$

Chiamiamo  $X_\varepsilon(t)$  la soluzione di (5.3.5). Allora (5.3.5) implica che  $\ddot{X}$  è limitata e la conservazione della energia implica che  $|\dot{X}| \leq v$ . Dunque la successione di funzioni  $X_\varepsilon$  è equilimitata ed equicontinua, dunque ha punti di accumulazione.

**Lemma 5.3.2.** *Ogni punto di accumulazione  $x$  di  $X_\varepsilon$  soddisfa l'equazione*

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2\gamma^2 v^6} \left[ \int_0^1 V(s) ds \right] + \mathcal{O}(v^{-8})$$

*Proof.* Sia  $h >$  allora dalla analisi predetende si ha che nel tempo  $h$  la particella incontra  $h\varepsilon^{-1}\dot{X}_\varepsilon(t)^{-1} + o(h\varepsilon^{-1})$  particelle leggere, vista l'equazione (5.3.7) si ha quindi

$$\dot{X}_\varepsilon(t+h) - \dot{X}_\varepsilon(t) = -\Gamma h \dot{X}_\varepsilon(t)^{-6} + \mathcal{O}(\dot{X}_\varepsilon(t)^{-8} h).$$

Dunque il punto di accumulazione  $x$  deve soddisfare l'equazione

$$\dot{x}(t+h) - \dot{x}(t) = -\Gamma h \dot{x}(t)^{-6} + \mathcal{O}(\dot{x}(t)^{-8} h).$$

Dividendo per  $h$  e prendendo il limite per  $h \rightarrow 0$  si ha il lemma.  $\square$

Abbiamo quindi una previsione: c'è una forza di attrito, ma decresce con la velocità. Questo è un fenomeno reale ed un poco controintuitivo, nonostante la estrema crudezza del modello.

**Commento 5.3.3.** *Ci si potrebbe chiedere, ma esiste il  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_\varepsilon$ ? La risposta è sì, ma per dimostrarlo occorrono ulteriori considerazioni che esulano dalla discussione corrente il cui scopo è solo di dare una idea impressionistica di cosa può accadere e non di sviluppare una vera teoria del fenomeno. Teoria che, per altro, esiste solo in maniera molto parziale.*