Chapter 5

Oscillazioni

5.1 Piccole oscillazioni

Supponiamo che $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $V \geq 0$ e $V(0) = V'(0) = 0$ e $V''(0) = a > 0$. Allora zero è un minimo locale.

Si assuma che l'energia abbia la forma $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$.

Esercizio 5.1.1. *Si mostri che siste una energia E_0 e un numero $L > 0$ tale che, per ogni $E \leq E_0$, l'insieme $I(E) = \{x \in \mathbb{R} \;:\; |x| \leq L, V(x) \leq E\}$ è un intervallo chiuso contenete zero la suo interno. Si mostri inoltre che si possono scegliere E_0, L tali che, per ogni $E \leq E_0$, $I(E) \subset I(E_0)$ e $V'(x) = 0$ con $x \in I(E)$ implica $x = 0$.*

Poniamo $I(E) = [x_-(E), x_+(E)]$ e studiamo il moto in questo intervallo per $E < E_0$.

Esercizio 5.1.2. *Si mostri che il moto in $I(E)$ è periodico. (suggerimento:* **prima** *pensateci e se proprio non sapete che pesci pigliare guardate uno dei libri consigliati).*

Quello che vogliamo studiare è il periodo $T(E)$.

Esercizio 5.1.3. *Si mosti che*

$$T(E) = 2\sqrt{m} \int_{I(E)} [2(E - V(x))]^{-\frac{1}{2}} \, dx.$$

(suggerimento: si usi la conservazione dell'energia).

Risulta conveniente scrivere $T(E) = 2T_-(E) + 2T_+(E)$ dove

$$T_-(E) = \sqrt{m} \int_{x_-(E)}^{0} [2(E - V(x))]^{-\frac{1}{2}} \, dx \tag{5.1.1}$$

$$T_+(E) = \sqrt{m} \int_{0}^{x_+(E)} [2(E - V(x))]^{-\frac{1}{2}} \, dx. \tag{5.1.2}$$

Esercizio 5.1.4. *Si mostri che gli integrali impropri (5.1.1) e (5.1.2) sono ben definiti. (suggerimento:* **prima** *pensateci e se proprio non sapete che pesci pigliare guardate uno dei libri consigliati).*

Poichè queste due quantità si possono studiare esattamente nello stesso modo ci concentrammo su T_+ lasciando al lettore lo studio di T_-.

Prima di tutto vogliamo studiare la funzione $x_+(E) \geq 0$. Essa è determinata dall'equazione $V(x_+(E)) = E$. Si noti che $V(x) = \frac{1}{2}ax^2 + x^3 W(x)$ dove W è una funzione liscia e limitata in $I(E_0)$. Vogliamo quindi risolvere l'equazione

$$\tilde{F}(x, E) = \frac{1}{2}ax^2 + x^3 W(x) - E = 0$$

Ovviamente tale equazione ha una soluzione ovvia: $x = E = 0$. Purtroppo non possiamo applicare il teorema della funzione implicita in tale punto visto che $\partial_x \tilde{F}(0, 0) = 0$. Tuttavia se introduciamo la variabile $x = \epsilon z$ con $\epsilon^2 = E$. Allora si ha

$$F(z, \epsilon) = \frac{1}{2}az^2 + z^3 \epsilon W(z\epsilon) - 1 = 0.$$

Questa equazione ora ha soluzioni $\epsilon = 0$; $z = \sqrt{2/a}$. Si noti che $\partial_z F(a^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2}, 0) = \sqrt{2a} \neq 0$, dunque ora possiamo usare il teorema della funzione implicita per studiare le soluzioni con $\epsilon > 0$. Ne segue che esiste $z(\epsilon)$ tale che $z(0) = a^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2}$ e $F(z(\epsilon), \epsilon) = 0$, inoltre dal teorema segue che

$$\frac{d}{d\epsilon} z(\epsilon) = -\frac{z(\epsilon)^2 W(\epsilon z(\epsilon)) + z(\epsilon)^3 \epsilon W'(\epsilon z(\epsilon))}{a + 3\epsilon z(\epsilon) W(\epsilon z(\epsilon)) + \epsilon^2 z(\epsilon)^2 W'(\epsilon z(\epsilon))}. \tag{5.1.3}$$

Questo implica che $z'(0) = 2a^{-2}W(0) =: \beta$.

Esercizio 5.1.5. *Si noti che (5.1.3) implica che $z \in \mathcal{C}^\infty$. Si calcoli $z''(0)$. Si mostri che z è ben definita su tutto l'intervallo $[0, \sqrt{E_0}]$. (suggerimento: il teorema della funzione implicita da una soluzione in un qualche intervallo $[0, \epsilon_0)$. Si mostri che la soluzione si può estendere all'intervallo $[0, \epsilon_0]$ e quindi si usi nuovamente il teorema della funzione implicita nel punto ϵ_0 per mostrare che l'intervallo può essere ulteriormente esteso. Da qui segue che non esiste un dominio massimale più piccolo di $[0, \sqrt{E_0}]$.)*

Ora che abbiamo qualche informazione su $x_+(E) = \epsilon z(\epsilon)$ possiamo tornare allo studio di $T_+(\epsilon^2)$. Se usiamo la variabile $x = x_+(E)\xi$ possiamo riscrivere (5.1.2) come

$$T_+(\epsilon^2) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{z(\epsilon)}{\sqrt{1 - \frac{a}{2}z(\epsilon)^2\xi^2 - \epsilon\xi^3 z(\epsilon)^3 W(\epsilon z(\epsilon)\xi)}} d\xi$$

Esercizio 5.1.6. *Si mostri che $T_+(0) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{a}}$.*

Per sapere come si comporta T_+ per piccole energie verrebbe quindi naturale derivare l'integrale rispetto a ϵ. Tuttavia questa è una faccenda un poco delicata visto che si tratta di un integrale improprio. Risulta essere più conveniente manipolare prima l'integrale in modo da renderlo più arrendevole. Notiamo che

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a}{2} z(\epsilon)^2 \xi^2 - \epsilon \xi^3 z(\epsilon)^3 W(\epsilon z(\epsilon)\xi) &= \frac{a}{2} z(\epsilon)^2 (1-\xi^2) \\ &+ \epsilon z(\epsilon)^3 W(\epsilon z(\epsilon)\xi)(1-\xi^3) + \epsilon z(\epsilon)^3 [W(\epsilon z(\epsilon)) - W(\epsilon z(\epsilon)\xi)] \\ &= (1-\xi) \left[\frac{a}{2} z(\epsilon)^2 (1+\xi) + \epsilon z(\epsilon)^3 \Omega(\epsilon, \xi) \right], \end{aligned}$$

dove $\Omega(\epsilon, 1-\xi) = W(\epsilon z(\epsilon)\xi)(1+\xi+\xi^2) + \frac{W(\epsilon z(\epsilon)) - W(\epsilon z(\epsilon)\xi)}{1-\xi}$. Si noti che $\Omega \in \mathcal{C}^2$.

È allora naturale introdurre la variabile $\eta = 1 - \xi$ che permette di scrivere

$$T_+(\epsilon^2) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{\eta^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{a}{2}(2-\eta) - \epsilon z(\epsilon)\Omega(\epsilon, \eta)}} d\eta$$

Finalmente poniamo $\eta = u^2$ e scriviamo

$$T_+(\epsilon^2) = \sqrt{2m} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{2}(2-u^2) - \epsilon z(\epsilon)\Omega(\epsilon, u^2)}} du.$$

Visto che l'integrando ora è una funzione liscia (nell'intervallo di integrazione) si possono tranquillamente calcolare le derivate derivando sotto il segno di integrazione.

Esercizio 5.1.7. *Si mostri che*

$$\begin{aligned} T_+(\epsilon^2) &= T_+(0) + \epsilon \sqrt{\frac{4m}{a^3}} z(0) W(0) \int_0^1 \frac{3 - 2u^2 + u^4}{(2-u^2)^{\frac{3}{2}}} du \\ &+ \epsilon^2 \sqrt{\frac{4m}{a^5}} \int_0^2 \frac{[3 - 2u^2 + u^4]\,[z'(0)W(0) + z(0)^2 W'(0)(1-u^2)]\,\{a(2-u^2) - 3\}}{(2-u^2)^{\frac{5}{2}}} du \\ &+ \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned}$$

(suggerimento: si derivi sotto il segno di integrale per calcolare i primi termini dello sviluppo in serie in ϵ.)

È interessante notare che se $V(x) = V(-x)$ allora, necessariamente, $W(0) = 0$. Ne segue che il periodo è, in questo caso, poco sensibile al cambio di energia, almeno per energie piccole.

5.2 Piccole oscillazioni in più dimensioni

Abbiamo visto che, in una dimensione, il moto vicino ad un minimo locale non degenere è periodico e abbiamo anche visto come calcolare il periodo con precisione arbitraria. La prossima domanda naturale è: che accade in più dimensioni?

Consideriamo il caso più semplice possibile: un potenziale strettamente convesso $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ con minimo in zero.[1] Allora l'equazione di Newton ha la forma

$$M\ddot{x} = -\nabla V(x). \tag{5.2.1}$$

Il nostro obiettivo è di studiare quali sono i moti possibili.

Ovviamente l'energia è una funzione di Lyapunov e quindi il minimo è un punto di equilibrio stabile per (5.2.1). Senza perdita di generalità possiamo assumere che il minimo è in zero (basta traslare le coordiante). È quindi naturale restringere il nostro interesse ad un piccolo intorno di zero. In tal caso il campo vettoriale avrà la forma $-\nabla V(x) = -D^2V(0)x + \mathcal{O}(\|x\|^2)$. Dunque il primo passo è di capire che accade con potenziali quadratici. In tal caso le equazioni del moto si scrivono come

$$M\ddot{x} = -Ax, \tag{5.2.2}$$

dove M, A sono matrici strettamente positive.[2] Risulta conveniente fare il cambio di variabili $x = M^{-\frac{1}{2}}z$,[3] allora

$$M^{\frac{1}{2}}\ddot{z} = -AM^{-\frac{1}{2}}z$$

ovvero

$$\ddot{z} = -M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}}z.$$

Si noti che anche $M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}}$ è simmetrica e definita positiva.[4]

5.2.1 Oscillatori armonici

In questa sezione volgiamo quindi studiare il problema[5]

$$\ddot{x} = -Ax, \tag{5.2.3}$$

con A simmetrica e definita strettamente positiva. Poichè è simmetrica, è diagonalizzabile e gli autovalori sono strettamente positivi. Chiamiamoli $\{\omega_i^2\}_{i=1}^d$. Si può quindi definire una matrice Ω, anche essa simmetrica e definita positiva, tale che $\Omega^2 = A$. Ovviamente gi autovalori di Ω saranno $\{\omega_i\}_{i=1}^d$. Se riduciamo (5.2.3) ad un sitema del primo ordine nelle variabili $z = (z_1, z_2) = (x, \dot{x})$, abbiamo

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\Omega^2 & 0 \end{pmatrix} z =: Bz. \tag{5.2.4}$$

---

[1] Ovvero $V(0) = 0$, $V(x) \geq 0$, e $D^2V(0)$ è una matrice strettamente definita positiva, ovvero esiste $a > 0$ tale che, per ogni $v \in \mathbb{R}^d$, $\langle v, D^2V(0)v\rangle \geq a\|v\|^2$.

[2] Nel nostro caso $A = D^2V(0)$ che è simmetrica per il Lemma di Schwartz e positiva poichè zero è un mininmo.

[3] Visto che la matrice M è diagonalizzabile, in quanto simmetrica, e che gli autovalori sono strettamente positivi, in quanto definita strettamente positiva, ne segue che $M^{-\frac{1}{2}}$ è ben definita.

[4] Infatti, per ogni $v \in \mathbb{R}^d$ abbiamo $\langle v, M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}}v\rangle = \langle (M^{-\frac{1}{2}}v), A(M^{-\frac{1}{2}}v)\rangle \geq 0$.

[5] Si noti che, per la discussione precedente, (5.2.2) può sempre essere messa in questa forma.

Abbiamo visto che la soluzione generale dell'equazione (5.2.4) è data da

$$z(t) = z_0 e^{Bt}.$$

Per rendere esplicita tale soluzione occorre calcolare gli autovalori della matrice B, ovvero risolvere

$$0 = \det(\lambda \mathbb{1} - B) = \det \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \Omega^2 & \lambda \mathbb{1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \Omega^2 + \lambda^2 \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \det \left(\lambda^2 \mathbb{1} - \Omega^2 \right)$$

Ovvero, gli autovalori di B sono $\{\pm i\omega_j\}_{j=1}^d$. Cerchiamo gli autovettori:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\Omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

che implica

$$\begin{aligned} \Omega^2 w_1 &= -\lambda^2 w_1 \\ w_2 &= \lambda w_1 \end{aligned}$$

Ne segue che gli autovettori hanno la forma $v_k^{\pm} = (w_k, \pm i\omega_k w_k)$ dove $w_i \in \mathbb{C}^d$ sono gli autovettori di A.[6] Poichè A è una matrice simmetrica si ha che $\langle w_k, w_l \rangle = \delta_{kl}$. Ne segue che se $k \neq l$ allora[7]

$$\langle v_k^{\pm}, v_l^{\pm} \rangle = \langle w_k, w_l \rangle - \omega_k \omega_k \langle w_k, w_l \rangle = 0.$$

Esercizio 5.2.1. *Data la matrice* $\Lambda = \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$ *si definisca il prodotto scalate* $\langle v, w \rangle_* := \langle v, \Lambda w \rangle$. *Si mostri che* $\langle v_k^{\pm}, v_l^{\pm} \rangle_* = 0$ *se* $k \neq l$. *Inoltre,* $\langle v_k^{+}, v_k^{-} \rangle_* = 0$. *Ovvero, gli autovalori di* B *sono ortogonali rispetto al prodotto scalare* $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$.

Esercizio 5.2.2. *Si verifichi che le soluzioni di* (5.2.3) *si possono scrivere come*

$$x(t) = \sum_{i=1}^{d} w_i (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t)$$

dove $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ *sono arbitrari.*

Si mostri che un modo alternativo di scrivere la soluzione generale è

$$x(t) = \sum_{i=1}^{d} w_i \alpha_i \cos(\omega_i t + \beta_i).$$

[6] Come al solito, quando si fa teoria spettrale (ovvero si trovano radici di polinomi) è conveniente lavorare nei complessi. Ovviamente bisogna ricordarsi che il risultato finale deve essere espresso da numeri reali.

[7] Si noti che stiamo usando $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sia per il prodotto scalare in $\mathbb{C}^d$ che per quello in $\mathbb{C}^{2d}$. Si ricordi inoltre che per $v, w \in \mathbb{C}^n$ si ha $\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} \bar{v}_k w_k$.

Come sono fatti tali moti nello spazio delle fasi? Siccome

$$(x(t), \dot{x}(t)) = \sum_{i=1}^{d} \big(w_i \alpha_i \cos(\omega_i t + \beta_i), -w_i \alpha_i \omega_i \sin(\omega_i t + \beta_i)\big)$$

il moto risulta essere decomponibile in fattori. Si consideri il caso in cui tutti gli α_j sono zero meno α_i. Allora il moto avverrà nel piano $\mathbb{V}_i = \{(\alpha w_i, \beta w_i) : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$. Per di più, in tale piano il moto è confinato ad una ellisse.[8]

Risulta perciò conveniente introdurre le nuove variabili $(\theta_i, I_i) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d_+$ e il cambio di variabili[9]

$$(z_1, z_2) = \sum_{i=1}^{d} I_i \left(w_i \cos\theta_i, -\omega_i w_i \sin\theta_i\right). \tag{5.2.5}$$

Esercizio 5.2.3. *Si verifichi che, se $I_i \neq 0$, il cambio di variabili è invertibile. Si verifichi che, nelle nuove variabili il modo è semplicemente*

$$I_i(t) = I_i(0)\,; \quad \theta_i(t) = \omega_i t + \beta_i.$$

Ovvero si verifichi che

$$(x(t), \dot{x}(t)) = \sum_{i=1}^{d} I_i(0)(w_i \cos\theta_i(t), -\omega_i w_i \sin\theta_i(t)) \tag{5.2.6}$$

L' equazione (5.2.6) implica che nelle variabili (I, θ) si ha

$$\dot{I} = 0$$
$$\dot{\theta} = \omega$$

dove $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_d)$.

In altre parole le I sono costanti del moto e, ad I fissata, il moto è diffeomorfo ad una traslazione rigida sul toro $\mathbb{T}^d$. Vale quindi la pena di investigare questo tipo di moto un poco più nel dettaglio.

5.2.2 Traslazioni rigide del toro

Nella sezione precedente il toro era periodico di periodo 2π. In questo capitolo, per convenienza di notazione, facciamo un banale cambio di coordinate e consideriamo tori di periodo uno, ovvero $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Se consideriamo su $\mathbb{R}^d$ l'equazione differenziale

$$\dot{\xi} = \bar{\omega}$$

dove $\bar{\omega} \in \mathbb{R}^d$ essa ha ovviamente soluzione $\xi(t) = \xi(0) + t\bar{\omega} =: \phi_t(\xi(0))$. Se vediamo $\mathbb{R}^d$ come un ricoprimento di $\mathbb{T}^d$, questo induce le traslazioni rigide sul

[8] Lo si dimostri.

[9] In questo caso $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d$, ovvero il toro ha grandezza 2π.

toro che abbiamo visto apparire nel capitolo precedente e che vogliamo studiare in questa sezione.

Cominciamo dal caso in cui $\frac{\omega_i}{\omega_j} \in \mathbb{Q}$ per tutti gli i, j. Si verifichi che questo implica che esistono $\omega \in \mathbb{R}$ e $p_i \in \mathbb{Z}$ tali che $(\omega_1, \ldots, \omega_d) = \omega \cdot (p_1, \ldots, p_d)$. Questo significa che, ponendo $T = \omega^{-1}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $\theta(t+T) = \theta(t)$, ovvero tutti i moti sono periodici di periodi T. Ne segue che tali moti avvengono in una curva chiusa, ovvero sono diffeomorfi ad un cerchio.

Consideriamo l'altro estremo: $\frac{\omega_i}{\omega_j} \notin \mathbb{Q}$ per tutti gli i, j. Per semplicità discutiamo prima il caso $d = 2$.

Esercizio 5.2.4. *Mostrare che il sistema non ammette orbite periodiche*

Per capire meglio il moto introduciamo la nozione di *sezione di Poincarè*. Si consideri $S = \{(0, y) \ : y \in \mathbb{R}\}$, allora il moto partendo da S è $(\omega_1 t, \omega_2 t + y)$. Se lo guardiamo al tempo $t = \omega_1^{-1}$ allora la prima coordinata e' uguale ad 1 che è come dire 0, per la periodicità del toro. Dunque siamo nuovamente in S, ma in quale punto? Ovviamente nel punto

$$f(y) = y + \alpha \mod 1,$$

dove $\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{Q}$. In altre parole abbiamo ottenuto una mappa $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ che è una rotazione irrazionale.

Esercizio 5.2.5. *Si mostri che, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha*

$$\phi_{n/\omega_1}(0, y) = (0, f^n(y)).$$

Lemma 5.2.6. *Le orbite di f sono dense in $\mathbb{T}$.*

Proof. Per ogni $y \in \mathbb{T}$, si consideri $\{f^n(y)\}$, questa è una successione in un compatto, quindi ammette una sottosuccessione convergente $\{f^{n_j}(y)\}$. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste j_0 tale che $|f^{n_{j_0}}(y) - f^{n_{j_0+1}}(y)| \le \varepsilon$. Chiamando $m = n_{j_0+1} - n_{j_0}$, segue che, per ogni $z \in \mathbb{T}$, $|f^m(z) - z| \le \varepsilon$. Dunque $\{f^{km}(y)\}$ procede a passi più piccoli di ε e quindi si avvicinerà a qualunque punto più di ε. Visto che ε è arbitrario, ne segue che $\{f^n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è densa in $\mathbb{T}$. □

Esercizio 5.2.7. *Si dimostri che il Lemma 5.2.6 implica che, per ogni $\alpha \notin \mathbb{Q}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $p, q \in \mathbb{N}$ tali che*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \le \varepsilon q^{-1}.$$

Esercizio 5.2.8. *Si estendano gli argomenti di cui sopra al caso $d > 2$. Ovvero si dimostri che se tutte le frequenze sono irrazionali tra di loro, allora il moto è denso su $\mathbb{T}^d$. (Suggerimento: si proceda per induzione. Assumendolo vero per d si consideri il caso $d+1$. Allora dato un qualunque $\bar{y} \in \mathbb{T}^d$ si consideri l'insieme $S = \{(\bar{y}, y)\}_{y \in \mathbb{T}}$. Per induzione, per ogni $\varepsilon > 0$ e $z \in \mathbb{T}^d$ a distanza da S minore di ε esiste un $m(z)$ tale che la distanza di $f^m(0, \ldots, 0, z)$ da S è minore di ε. Si noti che $\sup m(z) - \inf m(z) \le 2$. Si consideri allora la traiettoria $z_{j+1} = f^{m(z_j)}(z_j)$ e si argomenti che tale traiettoria arriverà in un intorno ε di qualunque punto di S.)*

5.2.3 Conclusione

Tornando al moto attorno al nostro punto di equilibrio, ne concludiamo che dipende dalle frequenze (ω_i), se sono razionalmente dipendenti, allora il moto si svolge su tori di dimensione più bassa, se non sono razionalmente dipendenti, allora il moto riempie densamente un toro di dimensione d. Tale moto è detto *quasiperiodico*.

La prossima domanda sarebbe: che succede nel caso non lineare? Sfortunatamente la risposta a tale domanda è assai complessa ed esula dagli scopi di questo corso. In effetti alcuni aspetti di questa domanda sono correntemente al centro della ricerca matematica.