Chapter 11

Hamiltoniane

Questo capitolo contiene un condensato estremo della teoria delle equazioni di Hamilton. Il suo proposito è quello di introdurre alla teoria e fornire alcuni fatti basilari. Per uno sviluppo organico e completo di questo argomento si consulti un libro di Meccanica (due ottimi esempi sono [3], più fisico ed intuitivo, e [2] più matematico e sofisticato). In particolare, nel seguito considererò sempre ODE su $\mathbb{R}^d$ sebbene la teoria naturale sia su varietà.

11.1 Lagrangiane

Si ricordi dal corso di Meccanica che per Lagrangiana si intende una funzione di due variabili $\mathcal{L}(z, y)$, $z, y \in \mathbb{R}^d$ che determina le equazioni del moto per un sistema meccanico in base alla seguente formula

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(q, \dot{q}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(q, \dot{q}) = 0$$

La forma più comune di Lagrangiana è data da una funzione del tipo

$$\mathcal{L}(z, y) = \frac{1}{2}\langle y, My\rangle - W(z)$$

dove M è una matrice $d \times d$ simmetrica e definita positiva[1] e $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. In questo caso le equazioni del moto si scrivono come[2]

$$M\ddot{q} = -\nabla W(q).$$

In questo caso è naturale riscrivere le equazioni come un sistema di equazioni del primo ordine introducendo la variabile $p = M\dot{q}$. Si ottime così il sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} &= M^{-1}p \\ \dot{p} &= -\nabla W(q). \end{aligned}$$

[1] Ovvero $\langle y, My\rangle > 0$ per ogni $y \neq 0$.

[2] Queste non sono altro che le ben note equazioni di Newton.

Abbiamo dunque una equazione del primo ordine su $\mathbb{R}^{2d}$ con campo vettoriale $V(q,p) = (M^{-1}p, -\nabla W(q))$. Sia ϕ_t il flusso associato alle equazioni differenziali di cui sopra. Mostreremo che tale flusso ha molte interessanti proprietà che a prima vista non sono visibili.

Come primo fatto notiamo che $\operatorname{div} V = 0$.

11.2 Flussi che preservano il volume

Si consideri una equazione differenziale del primo ordine

$$\dot{x} = V(x) \tag{11.2.1}$$

Teorema 11.2.1 (Liouville)**.** *Se* $\operatorname{div} V = 0$ *allora il flusso associato a* (11.2.1) *preserva il volume.*

Proof. Data una regione regolare $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, la sua immagine è al tempo t è data da $\phi_t(\Omega)$ e il suo volume da

$$\operatorname{Vol}(\phi_t(\Omega)) = \int_{\phi_t(\Omega)} dx = \int_\Omega |\det(D\phi_t(x))| dx = \int_\Omega |\det(\Xi(t,x))| dx.$$

dove $\Xi(t,x)$ è l'unica soluzione di

$$\dot{\Xi}(t,x) = DV(x(t))\Xi(t,x) \tag{11.2.2}$$

con $x(t) = \phi_t(x)$. Dalla struttura di gruppo segue che $\Xi(t+s,x) = \Xi(s,\phi_t(x))\Xi(t,x)$. Dunque

$$\frac{d}{dt}\det(\Xi(t,x)) = \det(\Xi(t,x)) \lim_{h\to 0} \frac{\det(\Xi(h,\phi_t(x))) - 1}{|h|}$$

Esercizio 11.2.2. *Si dimostri che se* $A \in GL(d,\mathbb{R})$ *è sufficientemente piccola allora*[3]

$$\det(\mathbb{1} + A) = e^{\operatorname{Tr}\ln(\mathbb{1}+A)}$$

Poichè integrando (11.2.2) si ha $\Xi(h,\phi_t(x)) = \mathbb{1} + DV \circ \phi_t h + \mathcal{O}(h^2)$, abbiamo

$$\det(\Xi(h,\phi_t(x))) = 1 + \operatorname{Tr} DV \circ \phi_t h + \mathcal{O}(h^2).$$

Quindi

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\det(\Xi(t,x)) = [\operatorname{Tr} DV] \circ \phi_t \cdot \det(\Xi(t,x))\\ &\det(\Xi(0,x)) = 1.\end{aligned}$$

Poichè l'ipotesi del Teorema è equivalente a $\operatorname{Tr} DV = 0$ segue $\det(\Xi(t,x)) = 1$ e $\operatorname{Vol}(\phi_t(\Omega)) = \operatorname{Vol}(\Omega)$, come annunciato. □

[3] La piccolezza di A serve a garantire che il logaritmo sia ben definito dalla usuale espansione in serie

$$\ln(\mathbb{1} + A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} A^n.$$

Per verificare l'uguaglianza ci si può mettere, per esempio, in forma normale di Jordan.

11.3 Hamiltoniane

La riduzione ad un sistema del primo ordine fatta nella sezione 11.1 può essere fatta in una generalità molto maggiore. Per esempio nel caso in cui Lagrangiana è convessa nella variabile y.

11.3.1 Un assaggio di analisi convessa

Una funzione $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ si dice convessa se per ogni $x, y \in \mathbb{R}^d$ e $t \in [0, 1]$ si ha $f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$, (se la disuguaglianza è ovunque stretta, allora la funzione si dice *strettamente* convessa).

Esercizio 11.3.1. *Si mostri che se $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, allora f è convessa se e solo se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ è una matrice definita positiva.*[4] *Si dia una condizione per la stretta convessità.*

Lemma 11.3.2. *Sia $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, D aperto e convesso,*[5] *una funzione convessa e limitata. Allora per ogni compatto $K \subset D$ eisiste $L_K > 0$ tale che, per ogni $x, y \in K$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq L_K \|x - y\|.$$

Proof. Si cominci col notare che existe $a > 0$ tale che $\inf_{x\in K, y\in\partial D} \|x - y\| \geq a$.[6] Sia $d = \sup_{x,y\in K} \|x - y\|$ e si ponga $\delta = ad^{-1}$.

Ne segue che per ogni $x, y \in K$, ponendo $\delta_{x,y} = \delta\|y - x\|^{-1}$, si ha $\{tx + (1-t)y\}_{t\in[-\delta_{x,y}, 1+\delta_{x,y}]} \subset D$. Sia $z = -\delta_{x,y}x + (1 + \delta_{x,y})y$ e $w = (1 + \delta_{x,y})x - \delta_{x,y}y$. Allora, ponendo $s = \frac{\delta_{x,y}}{1+\delta_{x,y}}$,

$$f(y) = f(sx + (1-s)z) \leq sf(x) + (1-s)f(z) = f(x) + \|y - x\|\frac{f(z) - f(x)}{\|z - x\|}.$$

That is, setting $M = \sup_{x\in D} |f(x)|$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{\|y - x\|} \leq \frac{f(z) - f(x)}{\|z - x\|} \leq \frac{2M}{\delta}.$$

Arguing similarly, we have

$$\frac{f(x) - f(y)}{\|y - x\|} \leq \frac{f(x) - f(w)}{\|w - x\|} \leq \frac{2M}{\delta}$$

from which the result follows with $L_K = \frac{2M}{\delta}$. □

[4] Una matrice $A \in GL(\mathbb{R}, d)$ si dice *definita positiva* se $A^T = A$ e $\langle v, Av\rangle \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^d$.

[5] Un insieme D si dice convesso se per ogni $x, y \in D$ e $t \in [0, 1]$ si ha $ty + (1-t)x \in D$.

[6] In caso contrario esisterebbe $\{x_n\}$ tale che $\lim_{n\to\infty} \inf_{y\in\partial D} \|x - y\| = 0$. Ma allora si portrebbe estrarre una sottosuccessione convergence $\{x_{n_j}\}$. Detto $\bar{x}$ is suo limite si avrebbe $\bar{x} \in K \cap \partial D$, ma tale intersezione è vuota.

Dal Lemma di cui sopra si ottiene immediatamente il seguente interessante fatto.

Corollario 11.3.3. *Sia $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, D aperto e convesso, una funzione convessa e limitata. Allora $f \in \mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$.*[7]

Data una funzione $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ si definisca la sua *Trasformata di Legendre* come

$$f^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \{\langle x, y\rangle - f(y)\} \tag{11.3.1}$$

Si noti che f^* può assumere il valore $+\infty$.

Esercizio 11.3.4. *Si mostri che f^* è convessa.*

Esercizio 11.3.5. *Si mostri che $f^{**} \leq f$.*

Esercizio 11.3.6. *Si mostri che se $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ è strettamente convessa allora la funzione $h(y) := \frac{\partial f}{\partial y}(y)$ è invertibile. Inoltre, detta g la funzione inversa di h, si ha*

$$f^*(x) = \langle x, g(x)\rangle - f \circ g(x).$$

Esercizio 11.3.7. *$f \in \mathcal{C}^2$ è strettamente convessa implica $f^{**} = f$.*

Esercizio 11.3.8. *Si mostri che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\langle x, y\rangle \leq f^*(x) + f(y)$, (disuguaglianza di Young).*

Esercizio 11.3.9. *Si calcoli la trasformata di Legendre delle seguenti funzioni di una variabile reale: $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$, $f(x) = x \ln x$, $f(x) = x^4$. Si calcoli inoltre la trasformata di Legendre di $f(x) = \langle x, Ax\rangle$ dove A è una matrice definita positiva.*

11.3.2 Definizione della Hamiltoniana

Tornando alle nostre motivazioni originali, data una funzione $\mathcal{L}(x, y)$ strettamente convessa nella seconda variabile definiamo la funzione

$$H(p, q) = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \langle p, y\rangle - \mathcal{L}(q, y),$$

la funzione H è detta *Hamiltoniana.* Se $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R})$, allora, dai precedenti esercizi si ha che per ogni $q \in \mathbb{R}^d$ la funzione $\Psi(q, \cdot) = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \cdot)}{\partial y}$ è invertibile come funzione di y, sia $G(q, \cdot)$ la sua inversa, e si ha

$$H(p, q) = \langle p, G(q, p)\rangle - \mathcal{L}(q, G(q, p)).$$

[7] In fatti, per il teorema di Rademacher, segue the f è quasi ovunque differenziabile, ma questo esula dalla semplice discussione che stiamo conducendo.

Lemma 11.3.10. *Data una Lagrangiana $\mathcal{L}$ e un moto $q(t)$ si consideri la funzione $p(t) = \frac{\partial \mathcal{L}(q(t),\dot q(t))}{\partial y}$. Le funzioni $(q(t), p(t))$ sono soluzioni delle equazioni*

$$\begin{aligned} \dot q &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot p &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \tag{11.3.2}$$

se e solo se $q(t)$ soddisfa le equazioni di Lagrange.

Proof. Le equazioni di Lagrange si scrivono come $\dot p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$. Inoltre, per definizione, $\partial_y \mathcal{L}(q(t), G(q(t), p(t))) = p(t) = \partial_y \mathcal{L}(q(t), \dot q(t))$; poichè $\partial_y \mathcal{L}(q(t), \cdot)$ è invertibile, segue che $G(q(t), p(t))) = \dot q(t)$. Quindi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q}(q,p) &= \langle p, \frac{\partial G}{\partial q}\rangle - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p}(q,p) &= G(q,p) + \langle p, \frac{\partial G}{\partial p}\rangle - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial p} = \dot q(t). \end{aligned}$$

Da cui il Lemma segue. □

Commento 11.3.11. *Le equazioni* (11.3.2) *sono dette* equazioni di Hamilton.

Esercizio 11.3.12. *Si mostri che se $q(t), p(t)$ sono soluzione delle equazioni di Hamilton allora $\frac{dH}{dt}(q(t), p(t)) = 0$.*

Esercizio 11.3.13. *Si mostri che le equazioni di Hamilton soddisfano le ipotesi del Teorema di Liouville.*

11.4 Hamiltoniane e geometria simplettica

Data la matrice $2d \times 2d$ definita da

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

le equazioni di Hamilton si possono scrivere come[8]

$$\dot x = J\nabla H(x) \tag{11.4.1}$$

dove $z = (q, p)$. Si noti che $J^2 = -\mathbb{1}$ e $J^T = -J$.[9] La matrice J gioca un ruolo fondamentale nella struttura Hamiltoniana. In particolare, si può definire la forma bilineare su $\mathbb{R}^{2d}$

$$\omega(v, w) := \langle v, Jw\rangle.$$

[8] Il gradiente di una funzione $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ è dato dal vettore $\nabla f := (\partial_{x_i} f)$.

[9] Si noti la somiglianza col numero immaginario i, dove il trasposto prende il posto della coniugazione complessa, non si tratta di un caso!

La forma ω si chiama *forma simplettica*. Una matrice A con la proprietà $\omega(Av, Aw) = \omega(v, w)$, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^{2d}$, si dice *simplettica*. Una trasformazione $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R}^{2d})$ tale che $DF(x)$ è simplettica per ogni $x \in \mathbb{R}^{2d}$ si dice *trasformazione simplettica*.

Lemma 11.4.1. *Per ogni Hamiltonian H il flusso Hamiltoniano ϕ_t è una trasformazione simplettica.*

Proof. Sia $\Xi(x,t) = D\phi_t$, allora

$$\dot{\Xi}(t,x) = JD^2H \circ \phi_t(x) \cdot \Xi(t,x)$$

dunque, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^{2d}$,

$$\frac{d}{dt}\omega(\Xi v, \Xi w) = \omega(\dot{\Xi} v, \Xi w) + \omega(\Xi v, \dot{\Xi} w) = \langle JD^2H\Xi v, J\Xi w\rangle - \langle \Xi v, D^2H\Xi w\rangle = 0,$$

dove abbiamo usato il fatto che D^2H è una matrice simmetrica.[10] □

Lemma 11.4.2. *L'insieme delle matrici simplettiche formano un gruppo (chiamato $Sp(2d,\mathbb{R})$). Inoltre, se $A \in Sp(2d,\mathbb{R})$ allora $A^T \in Sp(2d,\mathbb{R})$.*

Proof. Prima di tutto è si noti che una matrice è simplettica se e solo se $A^TJA = J$. Allora è banale verificare che $\mathbb{1} \in Sp(2d,\mathbb{R})$. Inoltre se $A, B \in Sp(2d,\mathbb{R})$, allora

$$(AB)^TJAB = B^TA^TJAB = J,$$

quindi $AB \in Sp(2d,\mathbb{R})$. Per altro $A[-JA^TJ] = \mathbb{1}$ mostra che A è invertibile e $A^{-1} = -JA^TJ$, inoltre

$$(A^{-1})^TJA^{-1} = (-JA^TJ)^TJA^{-1} = JAA^{-1} = J.$$

Dunque $A^{-1} \in Sp(2d,\mathbb{R})$. Finalmente, se $A \in Sp(2d,\mathbb{R})$, allora $A^{-1}J(A^T)^{-1} = J$ che implica $(A^T)^{-1} \in Sp(2d,\mathbb{R})$ e dunque $A^T \in Sp(2d,\mathbb{R})$. □

Si noti che $\det(A)^2 = 1$, infatti di più è vero.

Lemma 11.4.3. *Se $A \in Sp(2d,\mathbb{R})$, allora* $\det(A) = 1$.

Proof. Si scriva una matrice A, $2d \times 2d$, come

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$$

dove $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ sono matrici $d \times d$. Un calcolo esplicito mostra che $A \in Sp(2d,\mathbb{R})$ se e solo se

$$(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{c})^T = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{c}\,; \quad (\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{d})^T = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{d}\,; \quad \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} = \mathbb{1}. \tag{11.4.2}$$

[10]Ovviamente stiamo assumendo che $H \in \mathcal{C}^2$ e la simmetria segue dal Lemma di Schwartz.

Si noti che se $d = 1$ l'ultima di tali equazioni significa $\det A = 1$. Per $d > 1$ occorre un argomento più sofisticato.

Cominciamo con lo studiare il caso $\det(\boldsymbol{d}) \neq 0$. Notiamo che

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{d}^T & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{a} & \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \tag{11.4.3}$$

D'altro canto se moltiplichiamo le $d + i$-esime righe della matrice sulla destra per $\boldsymbol{b}_{ik}$ e le sommiamo alla k-esima riga otteniamo

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{a} & \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \det \boldsymbol{d}.$$

Applicando il determinante a (11.4.3) si ha dunque $\det \boldsymbol{d} \cdot \det A = \det \boldsymbol{d}$, dunque $\det A = 1$.

Ci rimane da esaminare il caso $\det \boldsymbol{d} = 0$. Per studiare questo caso occorre notare che ci si può ricondurre al caso precedente moltiplicando la matrice per una matrice simplettica di cui si conosce il determinate. Lasciamo i dettagli al lettore ma come suggerimento si considerino due sottoinsiemi disgiunti, α, β, di $\{1, \dots, d\}$ tali che $\alpha \cup \beta = \{1, \dots, d\}$ e una permutazione σ di $\{1, \dots, d\}$ tale che $\sigma^2 = id$ e si considerino le matrici

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & i \in \alpha,\ j = \sigma(i) \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases} \qquad Q_{ij} = \begin{cases} 1 & i \in \beta,\ j = \sigma(i) \\ 0 & \text{negli altri casi.} \end{cases}$$

Si verifichi che $PQ^T = QP^T = 0$, $PP^T + QQ^T = \mathbb{1}$ e che

$$\Pi = \begin{pmatrix} P & Q^T \\ Q & P^T \end{pmatrix}$$

è simplettica con determinante uno. Si studi quindi come sono fatti i blocchi della matrice (simplettica) ΠA e si noti che le (11.4.2) implicano che le righe di $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ devono contenere un sottoinsieme di d righe linearmente indipendenti. □

11.5 Trasformazioni Canoniche

Una trasformazione $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R}^{2d})$ si dice *canonica* per le Hamiltoniane H, K se per ogni soluzione $q(t), p(t)$ delle equazioni di Hamilton con Hamiltoniana H, le funzioni $(Q(t), P(t)) = F(q(t), p(t))$ soddisfano le equazioni di Hamilton con Hamiltoniana K.

Diciamo che una trasformazione F è *completamente canonica* se per ogni Hamiltoniana H è canonica per le Hamiltoniane $H, H \circ F^{-1}$.

Lemma 11.5.1. *Una trasformazione invertibile è completamente canonica se e solo se è simplettica.*

Proof. Si consideri la trasformazione invertibile $\Xi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R}^{2d})$. Se poniamo $\xi = \Xi(x)$ e consideriamo una soluzione $x(t)$ delle (12.1.2) per qualche Hamiltoniana H, segue che le funzioni $\xi(t) = \Xi(x(t))$ soddisfano

$$\dot{\xi}(t) = D\Xi(x(t))\dot{x}(t) = D\Xi(x(t))J\nabla H(x(t)).$$

Se la trasformazione è completamente canonica allora le equazioni del moto devono essere equazioni di Hamilton rispetto alla nuova Hamiltonina $K = H \circ \Xi^{-1}$, dunque $\nabla H = D\Xi^T \nabla K \circ \Xi$. Quindi le equazioni di cui sopra si possono scrivere come

$$\dot{\xi}(t) = D\Xi(x(t))JD\Xi^T(x(t))\nabla K(\xi(t))$$

che hanno a struttura delle equazioni di Hamilton se e solo se $D\Xi J D\Xi^T = J$, cioè la trasformazione Ξ è simplettica. $\square$

Si noti che non è affatto ovvio come costruire una trasformazione simplettica.

Una possibilità è quella di usare una Hamiltoniana il cui flusso al tempo uno da la trasformazione simplettica cercata (si veda il Lemma 11.4.1).

Un'altra possibilità è di costruire le trasformazioni simplettiche attraverso le cosiddette *funzioni generatrici.*

Si consideri $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R})$, si designino le variabili in $\mathbb{R}^{2d}$ come (q, P) dove (q, p) saranno le nostre vecchie variabili e (Q, P) quelle nuove ottenute attraverso la trasformazione simplettica che intendiamo costruire. Si considerino le relazioni

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F(q, P)}{\partial q} \\ Q &= \frac{\partial F(q, P)}{\partial P}. \end{aligned} \tag{11.5.1}$$

La prima domanda è: sotto quali condizioni le (11.5.1) definiscono un cambio di coordinate $\Xi(q, p) = (Q, P)$? Per rispondere basta applicare il teorema della funzione implicita alle (11.5.1).[11] Segue che si ha (localmente) un cambio di coordinate se $\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial P \partial q}$ è invertibile.

Lemma 11.5.2. *Se $\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial P \partial q}$ è invertibile, allora le (11.5.1) definiscono (localmente) un cambio di coordinate simplettico.*

[11] Si consideri la funzione $\Phi(q, p, Q, P) = (p - \frac{\partial F(q,P)}{\partial q}, Q - \frac{\partial F(q,P)}{\partial P})$.

Proof. Il teorema della funzione implicita implica

$$
\begin{aligned}
D\Xi &= -\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P} \\ \mathbb{1} & -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 P} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 q} & \mathbb{1} \\ -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \left[\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P}\right]^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P} \\ \mathbb{1} & -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 P} \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 q} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P} \\ \left[\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P}\right]^{-1} & -\left[\frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial q \partial P}\right]^{-1} \frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 P} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(q,P)}{\partial^2 q} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ricordando che la matrice delle derivate seconde è simmetrica, si può direttamente verificare che $D\Xi$ è dato dal prodotto di due matrici simplettiche e dunque è simplettico. □

Esercizio 11.5.3. *Si verifichi che $D\Xi$ non è una matrice simplettica qualunque ma una con un blocco invertibile (quale?)*

11.6 Uso delle trasformazioni canoniche

L'utilità delle trasformazioni canoniche consiste nella possibilità di cambiare variabile e trasformare una equazione differenziale complessa in una più semplice. Questo può essere fatto in maniera sistematica attraverso l'equazione di Hamilton-Jacobi. Questa è una teoria molto sviluppata, qui ci limitiamo ad un semplice esempio. Si consideri l'Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$$

dove $q, p \in \mathbb{R}$ e V è strettamente convessa (si tratta di un oscillatore anarmonico). Cerchiamo un cambio di coordinate in cui, chiamando (Q, P) le nuove coordinate, la nuova Hamiltoniana $K(Q, P)$ non dipenda dalle Q. In fatti, in tal caso le equazione del moto sono

$$
\begin{aligned}
\dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} =: \omega(P) \\
\dot{P} &= 0.
\end{aligned}
$$

Ovvero le P sono integrali del moto e le Q evolvono come $Q(t) = Q(0) + \omega(P)t$. Poichè il moto avviene in un compatto, ne segue che l'orbita di Q deve essere periodica, ovvero avviene su di un cerchio.

Per trovare il cambio di coordinate voluto consideriamo la funzione generatrice $F(q, P)$. Dalle (11.5.1) segue che vogliamo

$$K(P) = H\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}\right).$$

Ovvero, localmente,

$$F(q,P) = \int_{q_0}^{q} \sqrt{2(K(P) - V(s))}ds.$$

Lascio come esercizio al lettore il problema di definire la F globalmente ove possibile.

11.7 Sistemi completamente integrabili

Data una Hamiltoniana H sia $(q(t), p(t))$ un moto associato. Allora, per ogni funzione I, si ha

$$\frac{dI(q(t),p(t))}{dt} = \frac{\partial I}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial I}{\partial p}\dot{p} = \frac{\partial I}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial I}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}.$$

È quindi naturale definire le *parentesi di Poisson* tra due funzioni come

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} = \langle \nabla f, J\nabla g\rangle = L_{J\nabla g} f, \tag{11.7.1}$$

dove, dato un campo vettoriale v si ha che $v \cdot \nabla h = \sum_i v_i \partial_{\xi_i} h = L_v h$ è la derivata di Lie. Chiameremo un campo vettoriale v Hamiltoniano se esiste una funzione f tale che $v = J\nabla f$. Usando questa notazione abbiamo

$$\frac{dI(q(t),p(t))}{dt} = \{I, H\}(q(t), p(t)).$$

Ne seque che se $\{I, H\} = 0$ allora I è costante lungo i moti associati ad H. Una tale funzione si chiama *costante del moto*. Chiaramente H è una costante del moto (comunemente chiamata *energia*). Questo significa che gli insiemi di livello $\Sigma_E = \{(q,p) \in \mathbb{R}^{2d} \ : \ H(q,p) = E\}$ sono insiemi invarianti per il moto. Da ora in poi, per semplicità supporremo che tali insiemi siano compatti.

Poichè le Parentesi di Poisson sono antisimmetriche, ne segue che se consideriamo I come una Hamiltoniana allora H è costante lungo i moti di I. Che succede the abbiamo più costanti del moto $\{I_i\}_{i=1}^n$? Per capirlo dobbiamo addentrarci un poco di più nell'algebra delle parentesi di Poisson.

Lemma 11.7.1. *Le funzioni $\mathcal{C}^\infty$ con le parentesi di Poisson fomano una algebra di Lie.*[12]

Proof. L'unica cosa non ovvia è la uguaglianza di Jacobi. Si noti che

$$\begin{aligned}\{f,\{g,h\}\} =& \langle \nabla f, J\nabla\langle \nabla g, J\nabla h\rangle\rangle \\ &= \langle J\nabla f, D^2 h J\nabla g\rangle - \langle J\nabla f, D^2 g J\nabla h\rangle.\end{aligned}$$

Il risultato si ottiene quindi da un calcolo esplicito. □

[12]Uno spazio vettoriale con una operazione bilineare $[\cdot,\cdot]$ è un'algebra di Lie se $[x,x] = 0$ per ogni x e se, per ogni x, y, z, $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ (identità di Jacobi).

Ne segue che per ogni tripla di funzioni h, g, f si ha

$$\begin{aligned}L_{J\nabla\{f,g\}}h &= \{h, \{f, g\}\} = -\{g, \{h, f\}\} - \{f, \{g, h\}\} = \{\{h, f\}, g\} - \{\{h, g\}, f\}\\ &= L_{J\nabla g}L_{J\nabla f}h - L_{J\nabla f}L_{J\nabla g}h = L_{[J\nabla g, J\nabla f]}h.\end{aligned}$$

Da cui segue

$$J\nabla\{f, g\} = [J\nabla g, J\nabla f].$$

In altre parole se due campi vettoriali sono Hamiltoniani, allora il loro commutatore è anche esso un campo vettoriale Hamiltoniano e l'Hamiltoniana è data dalle parentesi di Poisson delle Hamiltoniane. Ovvero, poichè i campi vettoriali lisci formano un'algebra di Lie dove l'operazione bilineare è data dal commutatore, *i campi vettoriali Hamiltoniani formano una sotto algebra di Lie.*

In particolare questo significa che i campi vettoriali determinati dalle I_i commutano con quello Hamiltoniano. Inoltre si ha che

$$\{\{I_i, I_j\}, H\} = -\{\{I_j, H\}, I_i\} - \{\{H, I_i\}, I_j\} = 0,$$

ovvero la parentesi di Poisson di due costanti del moto è una costante del moto. Si possono quindi continuare a produrre nuove costanti del moto a meno che queste non siano in involuzione (ovvero $\{I_i, I_j\} = 0$). Ovviamente tali costanti del moto saranno veramente nuove solo se i campi vettoriali associati sono indipendenti da quelli precedenti.

Un caso di particolare interesse è quando ci sono $d - 1$ costanti del moto in involuzione e i campi vettoriali associati sono linearmente indipendenti ad ogni punto. Un sistema siffatto si chiama *completamente integrabile.* Consideriamo il caso in cui le superfici ad energia costante sono compatte.

Lemma 11.7.2. *Per ogni $E, \{\alpha_i\}_{i=1}^{d-1}$, se la superficie $M_{E,\alpha} = \{(q, p) \in \mathbb{R}^{2d} : H(q, p) = E, I_i(q, p) = \alpha_i\}$ è compatta e ad ogni punto $\{\nabla H, \nabla I_1, \dots, \nabla I_{n-1}\}$ sono linearmente indipendenti, allora o è vuota oppure è diffeomorfa a $\mathbb{T}^d$.*

Proof. Per la dimostrazione completa si veda [2, Sezione 10]. Qui notiamo solo che la superficie è invariante per i flussi associati a H, I_i. Tali flussi commutano (si veda il Lemma 11.7.3) e quindi, localmente, possono essere usati come coordinate sulla superficie (che è quindi d-dimensionale). Se uno usa queste coordinate globalmente allora definisce un ricoprimento della superficie il cui dominio fondamentale è un ipercubo. Un poco di topologia mostra che allora la superficie deve essere un toro. □

Ci rimane dunque da dimostrare che

Lemma 11.7.3. *Date due funzioni liscie I, G tali che $\{I, G\} = 0$ allora i flussi Hamiltoniani generati da I e G commutano.*[13]

[13] In realtà il fatto che i flussi siano Hamiltoniani è irrilevante, la cosa importante è che i campi vettoriali commutino. Tuttavia usare la struttura Hamiltoniana semplifica in poco la dimostrazione.

Proof. Sia ϕ^t if flusso generato da I e ψ^t quello generato da G. Sappiamo che $I \circ \psi^{-t} = I$. Differenziando e ricordando che ψ^t è simplettica (Lemma 11.4.1) si ha, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$,

$$J\nabla I = J(D\psi^{-t})^T(\nabla I) \circ \psi^{-t} = (D\psi^{-t})^{-1} J(\nabla I) \circ \psi^{-t} = [D\psi^t J\nabla I] \circ \psi^{-t}.$$

Ovvero

$$D\psi^t J\nabla I = (J\nabla I) \circ \psi^t.$$

Dati $x \in \mathbb{R}^{2n}$ e $t \in \mathbb{R}$ definiamo $\gamma(s) = \psi^t \circ \phi^s(x)$. Per quanto sopra si ha

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= D_{\phi^s(x)}\psi^t J\nabla I(\phi^s(x)) = (J\nabla I) \circ \psi^t(\phi^s(x)) = (J\nabla I)(\gamma(s)) \\ \gamma(0) &= \psi^t(x) \end{aligned}$$

Ma anche $\phi^s(\psi^t(x))$ è una soluzione di tale problema di Cauchy. Per l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy si ha quindi

$$\psi^t \circ \phi^s(x) = \phi^s \circ \psi^t(x)$$

e il Lemma segue per l'arbitrarietà di x, t, s. $\square$