Chapter 10

Corpi Rigidi

10.1 Tre punti nel piano

Si considerino 3 punti non collineari in $\mathbb{R}^2$ che soddisfano i vincoli

$$\|x_i - x_j\| = r_{i,j} > 0 \tag{10.1.1}$$

per ogni $i > j \in \{1, \dots, 3\}$. Sia $v = (x_1 - x_2)r_{1,2}^{-1}$ e $n \in \mathbb{R}^2$ il vettore unitario perpendicolare a v e tale che $\langle v, Jn\rangle = 1$ dove $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.[1] Possiamo quindi scrivere $x_3 - x_1 = av + bn$, dunque i vincoli (D.6.2) si possono scrivere come

$$\begin{aligned} r_{1,3}^2 &= a^2 + b^2 \\ r_{2,3}^2 &= \|x_3 - x_1 + x_1 - x_2\|^2 = (a + r_{1,2})^2 + b^2 = a^2 + 2ar_{1,2} + r_{1,2}^2 + b^2. \end{aligned}$$

Dunque $a = (r_{2,3}^2 - r_{1,3}^2 - r_{1,2}^2)(2r_{1,2})^{-1}$ e $b^2 = r_{1,3}^2 - a^2$. La seconda equazione ha soluzione solo se $r_{2,3} < r_{1,2} + r_{1,3}$, che è null'altro che la disuguaglianza triangolare. Si noti che l'equazione ha due soluzioni simmetriche rispetto alla linea passante per x_1, x_2.

Ne segue che, noti i vincoli, la posizione dei tre punti è univocamente determinata da x_1, v, e il segno di b. Poichè $\|v\| = 1$, esso è univocamente determinato da un angolo $\theta \in \mathbb{T}^1$: $v = (\cos\theta, \sin\theta)$. Possiamo quindi identificare tutte le possibili posizioni dei tre punti con $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1 \times \{-1, +1\}$.

Esercizio 10.1.1. *Si mostri che non esiste alcuna curva continua che unisce* $(x, \theta, +)$ *a* $(x', \theta', -)$.[2]

Ne segue che se vogliamo studiare il moto dei tre punti il segno di b non può cambiare e quindi lo spazio delle configurazioni è $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1$. In particolare, se abbiamo una configurazione di riferimento in cui $x_1 = 0$, $x_2 = (r_{1,2}, 0) = r_{1,2}v(0)$

[1] Questo fissa semplicemente l'orientamento della base $\{v, n\}$. In particolare $n = -Jv$.

[2] Un moto continuo non può cambiare l'orientamento.

and $x_3 = r_{1,3}v(\varphi)$, allora tutte le configurazioni possibili del corpo sono date da $x_1 = x$, $x_2 = x + r_{1,2}v(\theta)$, $x_3 = r_{1,2}v(\varphi + \theta)$. Oppure, alternativamente, $x_2 = R(\theta)r_{1,2}v(0)$ e $x_3 = R(\theta)r_{1,3}v(\varphi)$ dove

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

10.2 Quattro punti nello spazio

Si considerino 4 punti non complanari in $\mathbb{R}^3$ che soddisfano i vincoli

$$\|x_i - x_j\| = r_{i,j} > 0 \tag{10.2.1}$$

per ogni $i > j \in \{1, \dots, 4\}$. Sia $v = (x_1 - x_2)r_{1,2}^{-1}$, $\tilde{w} = (x_1 - x_3)r_{1,3}^{-1}$ e $n \in \mathbb{R}^2$ il vettore unitario perpendicolare a span$\{v, \tilde{w}\}$ e tale che[3]

$$\text{sign}\left\{\det\begin{pmatrix} v & \tilde{w} & n \end{pmatrix}\right\} = 1 \tag{10.2.2}$$

Possiamo ora introdurre la base ortonormale $\{v, w, n\}$ e sappiamo dalla sezione precedente che $x_2 = x_1 + r_{1,2}v$ e $x_3 = x_1 + av + bw$ dove a e $|b|$ sono univocamente determinati. Possiamo quindi scrivere $x_4 = x_1 + \alpha v + \beta w + \gamma n$ da cui segue

$$\begin{aligned} r_{1,4}^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\ r_{2,4}^2 &= (r_{1,2} + \alpha)^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\ r_{2,3}^2 &= (a + \alpha)^2 + (b + \beta)^2 + \gamma^2 \end{aligned} \tag{10.2.3}$$

Esercizio 10.2.1. *Si mostri che le (10.2.3) hanno soluzione se e solo se tutte le possibili disuguaglianze triangolari sono soddisfatte. Inoltre, se hanno soluzione allora α, β e $|\gamma|$ sono univocamente determinante.*

Ne segue che la posizione dei quattro punti è univocamente determinata dati x_1, v, w e il segno di b e γ. Tuttavia se consideriamo la configurazione data da $x_1, v, -w$ e $-b$, $-\gamma$ notiamo che la condizione (10.2.2) implica che il terzo vettore normale ora è $-n$ e quindi otteniamo esattamente la stessa posizione per x_2, x_3, x_4. Questo significa che possiamo restringerci al caso $b > 0$, dopo di che le posizioni di x_1, x_2, x_3 sono unicamente fissate mentre x_4 ha solo due possibili posizioni simmetriche rispetto al piano che contiene x_1, x_2, x_3. Come definire le coordinate? Una può essere x_1, le altre sono determinate da v, w, n ovvero da una base di $\mathbb{R}^3$, possiamo quindi identificarla col cambio di coordiante che porta la base standard $\{e_1, e_2, e_3\}$ in v, w, n. Occorrono quindi alcune conoscenze su questo tipo di cambio di variabili che sono decritte dal *gruppo ortogonale* $O(3, \mathbb{R})$ e dal *gruppo ortogonale speciale* $SO(3, \mathbb{R})$. Se non in possesso delle necessarie competenze si studi l'appendice A.

[3] Nuovamente questo determina l'orientamento.

10.3 Corpi rigidi in $\mathbb{R}^3$

Data una configurazione iniziale dei quattro punti tutte le configurazioni che possono essere raggiunte con un moto rigido sono descritte da $x_1 \in \mathbb{R}^2$ e $A \in SO(3, \mathbb{R})$.[4] Si considerino ora $N \in \mathbb{N}$ punti, $N \geq 4$, in $\mathbb{R}^3$ che soddisfano i vincoli

$$\|x_i - x_j\| = r_{i,j} > 0 \tag{10.3.1}$$

per ogni $i > j \in \{1, \ldots, N\}$. Se tutti i punti appartengono ad un piano P allora spostando la coordinata x_k di una quantità $h \in \mathbb{R}^3$ perpendicolare a P si ha

$$|\, \|x_k + h - x_j\| - \|x_k - x_j\|\, | \leq C\|h\|^2.$$

Ciò significa che si può deformare il corpo cambiando di pochissimo le distanze tra i punti. In altre parole il corpo non è molto rigido (si pensi ad una lamina o un filo). Assumiamo quindi che lo span di $x_j - x_1$ sia tutto $\mathbb{R}^3$. Dato qualunque insieme $\{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}$ dove $x_{i_2} - x_{i_1}$ e $x_{i_3} - x_{i_1}$ sono linearmente indipendenti l'analisi precedente ci dice che la loro posizione è determinata da x_{i_1} più una matrice $A \in SO(3, \mathbb{R})$ e la posizione di qualunque altro punto x_k che soddisfa i vincoli è univocamente determinata (a parte una riflessione globale rispetto al piano contenente i punti $\{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}$).

Ne segue che indipendentemente dal numero di punti un corpo rigido è caratterizzato da un insieme di vettori $\{v_i\}_{i=1}^n$, $v_1 = 0$, tali che $\|v_i - v_j\| = r_{i,j}$ e tutte le possibili posizioni dei suoi punti sono $x_i = x_1 + Av_i$ per qualche $x_1 \in \mathbb{R}^3$ e $A \in SO(3, \mathbb{R})$.

Se ora i punti hanno massa m_i, allora è conveniente scegliere il punto di riferimento come il centro di massa $z = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$. Quindi, i punti del corpo in una posizione generica sono descritti da $x_i = z + Av_i$, dove v_i sono le coordinate dei punti quando il centro di massa è nell'origine e il corpo è in una posizione di riferimento scelta a piacere (possibilmente in maniera conveniente). Si noti che deve essere $\sum_{i=1}^N m_i v_i = 0$. Ne segue che, dette $x_i(t) = z(t) + A(t)v_i$ le traiettorie dei punti,[5]

$$\dot{x}_i(t) = \dot{z}(t) + A(t)[\omega(t) \wedge v_i],$$

[4] Qui stiamo usando il fatto che $SO(3, \mathbb{R})$ è connesso e che $O(3, \mathbb{R})$ è l'unione di due "copie" di $SO(3, \mathbb{R})$.

[5] Si veda (A.0.1) per una discussione della derivata di una curva di matrici ortogonali e (A.1.2) per la definizione del prodotto vettoriale.

dove ω è l'asse di rotazione istantaneo. Quindi[6]

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \|\dot{x}_i(t)\|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ \|\dot{z}\|^2 + \langle \omega(t) \wedge v_i, \omega(t) \wedge v_i \rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \|\dot{z}\|^2 + m_i \langle a(v_i)\omega(t), a(v_i)\omega(t) \rangle \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \|\dot{z}\|^2 + \langle \omega(t), m_i[-a(v_i)^2]\omega(t) \rangle. \end{aligned}$$

Detta $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ la massa totale e $I = \sum_{i=1}^{N} m_i[-a(v_i)^2]$ il *momento di inerzia*, possiamo finalmente esprimere l'energia cinetica del corpo come

$$T = \frac{M}{2}\|\dot{z}\|^2 + \frac{1}{2}\langle \omega, I\omega \rangle.$$

Esercizio 10.3.1. *Si mostri che la matrice $I = (I_{i,j})$ che esprime il momento di inerzia ha la forma*

$$I_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\|v_k\|^2 \delta_{ij} - (v_k)_i (v_k)_j \right).$$

L'ultimo problema che ci rimane è: quali sono le coordinate Lagrangiane?

Dalla discussione precedente è ovvio che non ci sono coordinate veramente globali e naturali sebbene si possano trovare coordinate che hanno singolarità solo su un piccolo insieme (come accade, per esempio, con le coordinate polari). Esistono varie scelte per tali coordinate la più popolare essendo i cosiddetti *angoli di Eulero*. Potete trovare i dettagli su qualunque libro o leggere la prossima sezione.

10.4 Esempio: la ruota di bicicletta

Consideriamo un ruota con raggi di massa trascurabile e tutta la massa distribuita uniformemente sulla circonferenza di raggio r. Assumiamo che due perni di lungezza 1 sono attaccati al centro perpendicolari al piano della ruota i cui estremi sono sottoposti ad un potenziale $V(x, y, z) = -fy$ e $V(x, y, z) = fy$ rispettivamente, $f \geq 0$. Inizialmente il centro della ruota si trova nel punto 0 e la ruota giace nel piano xy e ruota con velocità angolare ω. Vogliamo descriverne il moto.

Per prima cosa dobbiamo introdure delle coordinate. Sia $\xi \in \mathbb{R}^3$ la posizione del centro della ruota. Possiamo allora scrivere

$$(x, y, z) = \xi + (x_1, y_1, z_1)$$

[6] Si noti che nella seconda eguaglianza il termine lineare in z è zero grazie alla nostra scelta del centro di massa come punto di riferiemento, che imoplica $\sum_{i=1}^{N} m_i v_i = 0$. Per la definizione della matrice antisimmetrica $a(v)$ si veda la appendice A.1.

Chiaramente nelle coordiante (x_1, y_1, z_1) il centro della ruota si trova all'origne delle coordiante. Sia P il piano contenente la ruota e n la linea di intersezione tra P e il piano x_1y_1. La linea n è identificata univocamente da un angolo $\phi \in [0, \pi)$ tale che $v(\phi) = (\cos\phi, \sin\phi, 0) \in n$. Detta $R_1(\phi)$ la matrice

$$R_1(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere

$$(x_1, y_1, z_1) = R_1(\phi)(x_2, y_2, z_2).$$

Poichè $R_1(\phi)(1, 0, 0) = v(\phi)$ ne segue che nelle coordinate (x_2, y_2, z_2) la ruota continene l'asse x_2. Sia θ l'angolo del piano P, contenente la ruota con l'asse z_2, ovvero $(0, \cos\theta, \sin\theta) \in P$. Possiamo quindi introdurre la rotazione attorno all'asse x_2 data da

$$R_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

e scrivere

$$(x_2, y_2, z_2) = R_2(\theta)(x_3, y_3, z_3).$$

Si noti che, nelle coordinate (x_3, y_3, z_3) sia $(1, 0, 0)$ che $(0, 1, 0)$ appartengono a P, dunque la ruota giace nel piano x_3, y_3. Finalmente, per descrivere il moto della ruota consideriamone un punto (ad esempio la valvola per la camera d'aria) sia $r(\cos\psi, \sin\psi, 0)$ la posizione di tale punto. Possiamo quindi fare una rotazione attorno all'asse z_3 di un angolo ψ in modo da portare tale punto sull'asse in modo che

$$(x_3, y_3, z_3) = R_3(\psi)(x_4, y_4, z_4)$$

dove

$$R_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che, dato un punto di coordinate (x_4, y_4, z_4) nel sistems solidale con la ruota, esso si muove come

$$(x, y, z) = R_1(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi)(x_4, y_4, z_4).$$

Dunque il moto è descrito dagli angoli $(\psi, \theta, \psi) \in [0, \pi) \times [0, 2\pi)^2$, detti *angoli di Eulero.*

Il prossimo passo è di calcolare la velocità angolare: detto $\xi := (x_4, y_4, z_4)$ e $R_*(\phi, \theta, \psi) = R_1(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi)$, abbiamo (si ricordi l'equazione (A.0.2), la definizione (A.1.1) e il problema A.1.3)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R_*(\phi, \theta, \psi)\xi =& \dot\phi R_1(\phi)e_3 \wedge R_2(\theta)R_3(\psi)\xi + \dot\theta R_1(\phi)R_2(\theta)e_1 \wedge R_3(\psi)\xi \\ &+ \dot\psi R_1(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi)e_3 \wedge \xi \\ =& R_*(\phi, \theta, \psi)\left\{\dot\phi R_3(-\psi)R_2(-\theta)e_3 + \dot\theta R_3(-\psi)e_1 + \dot\psi e_3\right\} \wedge \xi \end{aligned}$$

dunque

$$\omega = \dot{\phi}(\sin\psi\sin\theta, \sin\theta\cos\psi, \cos\theta) + \dot{\theta}(\cos\psi, -\sin\psi, 0) + \dot{\psi}(0, 0, 1).$$

L'ultima cose che dobbiamo calcolare è il momento di inerzia.

Nelle cordinate solidali col corpo la posizione di un punto generico è data da $\eta(\alpha) = r(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ e quindi, detta M la massa della ruota e $\rho = \frac{M}{2\pi r}$,

$$\begin{aligned}
I &= -\int_0^{2\pi} d\alpha\rho a(\eta(\alpha))^2 = -\int_0^{2\pi} d\alpha\rho \begin{pmatrix} 0 & 0 & r\sin\alpha \\ 0 & 0 & -r\cos\alpha \\ -r\sin\alpha & r\cos\alpha & 0 \end{pmatrix}^2 \\
&= \int_0^{2\pi} d\alpha\rho \begin{pmatrix} r^2\sin\alpha^2 & -r^2\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ -r^2\sin\alpha\cos\alpha & r^2\cos\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{M}{2}r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{2}r & 0 \\ 0 & 0 & Mr \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ne segue che l'energia cinetica ha la forma

$$\frac{Mr}{4}\left[\dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta\right]$$

mentre il potenziale ha la forma

$$-2f\langle e_3, R_1(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi)e_3\rangle = 2f\cos\phi\sin\theta.$$

Abbiamo quindi finalmente la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{Mr}{4}\left[\dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta\right] - 2f\cos\phi\sin\theta.$$

Dunque le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{aligned}
&\frac{Mr}{2}\left\{\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right\} - 2f\sin\phi\sin\theta = 0 \\
&Mr\ddot{\theta} + \frac{Mr}{2}\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta + 2f\cos\theta\cos\phi = 0 \\
&\frac{Mr}{2}\frac{d}{dt}\left\{2\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Consideriamo le condizioni iniziali $\phi = \theta = \psi = 0$ e $\dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$, $\dot{\psi} = \omega_0$. Allora, l'ultima equazione implica

$$2\dot{\psi} = 2\omega_0 - \dot{\phi}\cos\theta.$$

Nel caso $\omega_0 = 0$ allora $\psi \equiv 0$, $\phi \equiv 0$ danno una soluzione a patto che

$$Mr\ddot{\theta} + 2f\cos\theta = 0.$$

Moltiplicando per $\dot{\theta}$ e integrando si ha

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{Mr}{2}\dot{\theta}^2 + 2f\sin\theta\right] = 0$$

che implica che la ruota gira attorno all'asse x fino a che $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Se invece $\omega_0 > 0$, allora dalla terza equazione di ha $2\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta = 2\omega_0$ da cui segue

$$\frac{Mr}{2}\left\{\left(1 - \frac{1}{2}\cos\theta^2\right)\ddot{\phi} - \omega_0\dot{\theta}\sin\theta\right\} - 2f\sin\theta\sin\phi = 0$$
$$Mr\ddot{\theta} + \frac{Mr}{2}\dot{\phi}\omega_0\sin\theta - \frac{Mr}{4}\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta + 2f\cos\theta\cos\phi = 0.$$

Siccome non è ovvio come risolvere queste equazioni limitiamoci a capire cosa succede per tempi relativamente brevi nel caso in cui $\omega_0 \gg 1$. Se poniamo $t \leq \alpha\omega_0^{-\frac{1}{3}}$ tale che $\sup_{s\leq t}|\dot{\phi}(s)| + |\dot{\theta}(s)| \leq \omega_0^{-\frac{1}{3}}$ allora, per ogni $s \leq t$, $|\phi(s)| \leq s\omega_0^{-\frac{1}{3}} \leq \alpha\omega_0^{-\frac{2}{3}}$ and $|\theta(s)| \leq s\omega_0^{-\frac{1}{3}} \leq \alpha\omega_0^{-\frac{2}{3}}$. Quindi, per α sufficientemente piccolo,

$$|\ddot{\phi}| \leq \frac{5}{Mr\omega_0}\left(\dot{\theta}|\theta| + 2f\right) \leq 1$$
$$|\ddot{\theta}| \leq 3\frac{f}{Mr}.$$

Che è consistente con $|\dot{\phi}(s)| \leq \omega_0^{-\frac{1}{3}}$ e $|\dot{\theta}(s)| \leq \omega_0^{-\frac{1}{3}}$ per ogni $s \leq t$. Quindi per ogni $t \leq \alpha\omega^{-\frac{1}{3}}$ abbiamo

$$\frac{Mr}{4}\frac{d}{dt}\left\{\dot{\phi} - 2\omega_0\cos\theta\right\} = \mathcal{O}(\omega_0^{-\frac{4}{3}})$$

che implica

$$\dot{\phi} - 2\omega_0\theta^2 = \mathcal{O}(\omega_0^{-\frac{4}{3}}).$$

Da questo segue

$$Mr\ddot{\theta} + 2\omega_0^2\theta^3 + 2f = \mathcal{O}(\omega_0^{-\frac{4}{3}}).$$

Da cui, per α piccolo si ha

$$Mr\ddot{\theta} \leq -f.$$

Quindi

$$\frac{Mr}{2}\ddot{\phi}(t) = \omega_0\dot{\theta}(t)\theta(t) + \mathcal{O}(\omega_0^{-\frac{4}{3}}) \geq \frac{\omega_0 f^2}{2M^2r^2}t^3 + \mathcal{O}(\omega_0^{-\frac{4}{3}}).$$

Ne segue che per $t_0 = \alpha\omega_0^{-\frac{1}{3}}$, che è un tempo abbastanza corto,

$$Mr\ddot{\phi}(t_0) \geq \frac{\alpha^3 f^2}{M^2r^2} + \mathcal{O}(\omega_0^{-\frac{4}{3}}).$$

Dunque, sorprendentemente, il moto avviene come se ci fosse una forza di grandezza almeno $\frac{\alpha^3 f^2}{M^2r^2}$ che cerca di fare ruotare il piano della ruota attorno all'asse z mentre la forza che noi applichiamo cerca solo di ruoutare il piano della ruota attorno all'asse x.