Chapter 1

Meccanica, introduzione

1.1 Dinamica di una particella

L'inzio della meccanica moderna è segnato dalle equazioni di Newton che forniscono un modello per il moto di una particella puntiforme[1]

$$f = ma. \tag{1.1.1}$$

Vale quindi la pena di discutere un attimo sul significato di questa famosa formula.

Prima di tutto si noti che questa equazione è assunta valida solo nei *sistemi inerziali*. Un sistema inerziale è un sistema in cui, se non agiscono forze, il moto è rettilineo uniforme.

In secondo luogo l'idea di *particella puntiforme* è chiaramente una astrazione: si tratta di un modello per un corpo le cui dimensioni sono molto piccole rispetto alla scala in cui variano le forze. Si noti che questa definizione è altamente astratta in quanto nella nostra esperienza quotidiana nulla ha un moto rettilineo uniforme a meno che non vi si applichi una forza. È stato un grande merito di Galileo prima e Newton poi capire che questo è dovuto alla presenza di forze di attrito e che, in loro assenza, il moto rettilineo uniforme è il moto "naturale".

La a in (1.1.1) sta per l'accelerazione, ovvero se $x(t)$ è la posizione della particella al tempo t, allora, al tempo t, si ha $a = \ddot{x}(t)$.

Occorre poi capire cosa sono le *forze*, ovvero la lettera f nella equazione (1.1.1). Cosa sia la forza non è immediatamente chiaro. Normalmente è una funzione della posizione e, possibilmente, della velocità. Consideriamo il caso più semplice in cui è solo una funzione della posizione. Se si vuole conoscere la forza in un punto dello spazio si può misurare la *forza statica*. Che un corpo in movimento sia soggetto alla stessa forza misurata staticamente è una assunzione del modello.

[1] Ovviamente Newton non ha inventato le cose dal nulla, esisteva tutta una corrente di pensiero e una comunità il cui lavoro è stato propedeutico a Newton e senza cui Newton non avrebbe potuto ottenere i suoi impressionanti risultati. Ma questo non è un corso di storia della scienza.

Quindi, senza entrare nell'annosa questione di cosa sia una forza, possiamo accontentarci di misurarla. Per farlo abbiamo bisogno di un termine di paragone (per esempio un *dinamometro*).[2] Un esempio tipico di dinamometro è il dinamometro a molla. Questo si basa sull'osservazione che se uno tira una molla questa si allunga di una quantità e se due persone la tirano ognuno nello stesso modo allora questa si allunga del doppio.[3] Si può quindi fare un modello di molla in cui l'allungamento è proporzionale alla forza applicata (qualunque cosa essa sia). A questo punto possiamo assumere che per misurare la forza che si esercita su di un punto materiale nella posizione x possiamo fissare un capo della molla al punto x e l'altro al punto materiale. Se si assume che la forza sia circa costante in un intorno del punto x allora possiamo osservare cosa succede quando il punto si trova in equilibrio. Questo significa che la sua accelerazione è nulla e quindi, secondo l'equazione (1.1.1) deve essere $-k\ell = f(x)$, dove ℓ è l'allungamento delle molla.

È importante notare che nel ragionamento precedente abbiamo assunto che se su di un corpo agiscono due forze f_1 e f_2, allora la forza totale che agisce su di esso è data da $f_1 + f_2$. Questo può sembrare ovvio ma non lo è. Prima di tutto perchè è falso (quando le forze e le velocità delle particelle sono sufficientemente grandi) e in secondo luogo perchè anche se uno ammette, per esempio, che le forze si compongano con la regola del parallelogrammo il fatto che questa regola geometrica corrisponda all'operazione di somma è, a dir poco, sorprendente ed è una profonda manifestazione della relazione straordinaria che esiste tra due branchie della matematica che si sono sviluppate in maniera largamente indipendente: la geometria e l'algebra.

Rimane da discutere la massa. La (1.1.1) dice che l'accelerazione è proporzionale alla forza. La cosa sorprendente è che la costante di proporzionalità non dipende dal tipo di forza ma è una caratteristica del corpo che è chiamata *massa*. Inoltre, se si hanno due corpi di massa m_1 e m_2 e li si attacca tra loro con un qualcosa di massa trascurabile, se si può considerare il corpo ottenuto da tale unione come un punto materiale allora la sua massa sarà m_1+m_2. Anche questa proprietà additiva della massa non è ovvia a priori, ma risulta sperimentalmente corretta nell'ambito di applicabilità della meccanica Newtoniana.

L'ultima questione che meriterebbe una discussione è cosa siano il tempo e lo spazio. Nel modello in discussione si assume che lo spazio sia $\mathbb{R}^3$, ovvero la posizione del punto materiale è data da tre coordinate (infatti, più precisiamente, assumiano che lo spazio sia lo spazio affine E_3, si veda il capitolo 6 per una discussione più accurata). Per quanto riguarda il tempo assumiano che sia rappresentato da $\mathbb{R}$, ovvero abbia una struttura d'ordine totale, e sia indipendente da tutto. Queste, nuovamente, sono assunzioni false anche se accurate nell'ambito della meccanica classica. Qui non ci addentreremo in una ulteriore discussione visto che la natura del tempo e dello spazio sono tutt'ora un mistero al centro della ricerca scientifica.

[2] Il nome viene dal greco $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ (dinamica) che significava forza o potenza.

[3] Ovviamente anche questa è una approssimazione, se si tira troppo la molla semplicemente si rompe.

1.2 Forze e dinamica di molte particelle

Il lettore potrebbe essere insoddisfatto dalla nostra discussione delle forze in quanto abbiamo spiegato come misurare una forza ma non cosa è. Questo non è casuale: cosa sia veramente una forza è un argomento di ricerca ancora aperto. Tuttavia ci sono alcune forze che sono ritenute *fondamenteli* e altre che sono considerate *derivate*. Tra le forze fondamentali abbiamo la forza di gravità e quella elettromagnetica. Date due particelle di massa m_1, m_2 e posizione $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$, la forza esercitata dalla particella due sulla uno è data da

$$f(x_1, x_2) = -\frac{Gm_1m_2}{\|x_1 - x_2\|^3}(x_1 - x_2),$$

dove G è una costante detta *costante di gravitazione universale*.[4]

D'altro canto date due particelle elettricamente cariche di cariche e_1, e_2 la forza elettrica esercitata dalla particella due sulla uno è data da

$$f(x_1, x_2) = \frac{Ke_1e_2}{\|x_1 - x_2\|^3}(x_1 - x_2),$$

dove K è la costante di Coulomb.[5]

Come si vede le due forze sono molto simili. Le due differenze maggiori sono che le masse sono sempre positive, $m_i \geq 0$, e quindi la forza gravitazionale è sempre attrattiva. Mentre le cariche elettriche possono essere sia positive che negative e quindi, se le particelle hanno la stessa carica, la forza è repulsiva.

L'altra differenza è che K è enormemente più grande che G. Per farsene una idea approssimativa si pensi al fatto, noto sin dall'antichità, che strofinando un pezzo di lana su di un pezzetto di ambra (in greco antico si chiamava, non a caso, $\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho o\nu$ (elektron)) questa acquista la capacità di attrarre piccoli oggetti. Potete fare l'esperimento voi stessi con un pezzetto di lana, una biro e dei pezzetti di carta. Noterete che i pezzetti di carta sono attratti dalla biro, questo significa che la forza elettrica sviluppata dal piccolo sbilanciamento di cariche indotto dallo strofinamento della biro e della lana è più forte della forza di gravità terrestre che è l'effetto combinato di tutti gli atomi della terra sul pezzetto di carta.

Vi potreste chiedere: se la forza elettrica è così forte come mai non ne sentiamo gli effetti. La ragione è che le cariche positive e quelle negative sono quasi esattamente nello stesso numero e quindi la materia è quasi neutra. Ne parleremo nuovamente più avanti.

In natura sappiamo esistere altre due forze fondamentali: la forza *debole* responsabile del decadimento radioattivo e la forza *forte* che permette l'esistenza dei nuclei degli atomi. Tuttavia queste forze agiscono solo distanze molto piccole, dell'ordine dell'atomo, e non hanno quindi effetti direttamente percepibili nella scala spazio-temporare in cui viviamo. Per altro la loro descrizione richiede strumenti matematici abbastanza sofisticati, quindi, nel seguito, le ignoreremo.

---

[4] Il suo valore approssimato è $G = 6.6743 \cdot 10^{-11} m^3\, kg^{-1} s^{-2}$.

[5] Il suo valore approssimato è $K = 8.9875 \cdot 10^9 m^3\, kg\, s^{-4} A^{-2}$.

Esempi di forze derivate sono l'attrito che modella l'effetto dell'interazione di un corpo con gli atomi di cui è costituito il mezzo in cui il corpo si muove. Oppure la forza elastica che è un effetto delle proprietà delle molecole che costituiscono un corpo. Oppure, similmente all'attrito, la viscosità in un fluido.

Se invece di una sola particella se ne hanno N la cui posizione è data da $\{x_i\}_{i=1}^N$, con $x_i \in \mathbb{R}^3$, e di massa $\{m_i\}_{i=1}^N$, che sono sottoposte ad una forza esterna F e tali che tra ogni coppia di particelle i, j esiste una forza $f_{ij}(x_i, x_j)$, come si scrivono le equazioni del moto? Abbiamo visto che la risposta (data da Newton) è che le forze si sommano linearmente, ovvero

$$m_i \ddot{x}_i = F(x_i) + \sum_{j \neq i} f_{ij}(x_i, x_j).$$

Abbiamo così ottentuo un sistema di $3N$ equazioni differenziali del secondo ordine. Sembra quindi necessario cominciare lo studio della dinamica con un piccolo riassunto di alcuni fatti sulle equazioni differenziale che ci serviranno nel seguito. Ma prima di fare ciò, discutiamo un attimo del fatto che le equazioni di Newton non sono valide in sistemi non *inerziali*.

1.3 Moto locale sulla superficie terrestre

Per dare una prima una idea della differenza tra le equazioni del moto nei sistemi inerziali e il caso generale discutiamo brevemente il moto sulla superficie terrestre. Questo è un assaggio della teoria generale che sarà sviluppata nel Capitolo 6.

Sia $z \in \mathbb{R}^3$ una particella che si muove sulla superficie terrestre senza essere sotto l'influenza di una forza esterna. Con questo vogliamo dire: nessuna forza esterna a parte quelle che mantengono la particella sulla superficie terrestre. Infatti una particella sulla superficie terrestre è sempre sottoposta ad almeno due forze: la forza di gravità, e una forza esercitata dal pavimento che permette alla particella di non sprofondare nella terra. Questo significa che le equazioni di Newton hanno la forma

$$m\ddot{z} = f \tag{1.3.1}$$

dove f è una forza che ha il solo effetto di mantenere la particella sulla superificie terrestre. La forma della terra è chiamata *geoide* e differisce da un *ellissiode* per i dettagli locali (montagne, mari, coposizione disomognea della terra etc.). L'ellissiode che descrive il comportamento medio della superficie terrestre differisce da una sfera, di raggio $r_T = 6371$ km, per lo schiacciamento ai poli, ma si tratta di un effetto non grande, circa il 3 per mille. Una ragionevole approssimazione è considerare la forma della terra some una superficie di rivoluzione attorno all'asse nord-sud. Possiamo quindi descriverla in coodinate polari come

$$S(\theta, \varphi) = r(\varphi)(\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi) =: r(\varphi)n(\theta, \varphi),$$

con $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ and $\theta \in [0, 2\pi)$.[6] Per esempio, $r = r_T(1 + e(\sin\varphi)^2)^{-1}$ con

[6] Spesso le coordinate polari si scrivono come $r(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$ with $\varphi \in [0, \pi]$, ma qui adottiamo l'uso geografico.

$e = 3 \cdot 10^{-3}$, sarebbe una buona approssimazione. Il piano tangente è descritto dai vettori

$$\begin{aligned}
\partial_\theta S &= r(\varphi)(-\sin\theta\cos\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0) =: r(\varphi)v(\theta)\cos\varphi \\
\partial_\varphi S &= r(\varphi)(-\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi) + r'(\varphi)n(\theta,\varphi) \\
&=: r(\varphi)w(\theta,\varphi) + r'(\varphi)n(\theta,\varphi).
\end{aligned}$$

Ne segue che il vettore ortonormale alla superficie terrestre è dato da[7]

$$\begin{aligned}
\eta &= (1+\alpha(\varphi)^2)^{-\frac{1}{2}}\,[n(\theta,\varphi) - \alpha(\varphi)w(\theta,\varphi)] \\
\alpha(\varphi) &= \frac{r'(\varphi)}{r(\varphi)}.
\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Se definiamo $\tilde{w}(\theta,\varphi) = w(\theta,\varphi) + \alpha(\varphi)n(\theta,\varphi)$, e $\hat{w} = (1+\alpha(\varphi)^2)^{-\frac{1}{2}}\tilde{w}$, allora $\{\eta, v, \hat{w}\}$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, e lo span di $\{v, \hat{w}\}$ forma lo spazio tangente ad ogni punto della superficie (si verifichi che $\langle v, n\rangle = \langle v, w\rangle = 0$).

Il fatto che la particella sta sulla superfice terrestre implica che a tutti i tempi $z(t) = r(\varphi(t))n(\theta(t),\varphi(t))$. Per procedere occorre calcolare $\ddot{z}$ nelle coordinate θ, φ.

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= r'n\dot{\varphi} + rw\dot{\varphi} + rv\dot{\theta}\cos\varphi \\
\ddot{z} &= r''n\dot{\varphi}^2 + 2r'v\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi + r'n\ddot{\varphi} + r\partial_\theta v\dot{\theta}^2\cos\varphi - rv\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi \\
&\quad + rv\ddot{\theta}\cos\varphi + 2r'w\dot{\varphi}^2 + r\partial_\theta w\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\partial_\varphi w\dot{\varphi}^2 + rw\ddot{\varphi}.
\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Qui ci limitiamo a studiare il caso in cui il moto della particella avviene su di una scala molto più piccola del raggio terrestre e a medie latitudini. In altre parole $\theta(t) = \theta_0 - \omega t + \vartheta(t)$ e $\varphi(t) = \varphi_0 + \phi(t)$, $|\varphi_0| > .5$, dove $\omega \sim 7 \cdot 10^{-5}$ radianti per secondi^{-1} rappresenta la rotazione terrestre[8] sul suo asse e ϑ, ϕ rappresentano la piccola scala su cui avviene il moto.

Per uso futuro, si verifichi che

$$\begin{aligned}
&\langle v, \partial_\theta v\rangle = 0 \\
&\langle v, \partial_\theta w\rangle = -\langle w, \partial_\theta v\rangle = -\sin\varphi \\
&\langle v, \partial_\varphi w\rangle = -\langle w, \partial_\varphi v\rangle = 0 \\
&\langle \partial_\theta v, n\rangle = -\cos\varphi \\
&\langle n, \partial_\theta w\rangle = 0 \\
&\langle n, \partial_\varphi w\rangle = -1.
\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Rimane da determinare la f in (1.3.1). Come abbiamo detto, la forza consta di due parti: un forza gravitazionale f_g e una reazione vincolare f_v che ha il solo effetto di mantenere la particella sulla superfice terrestre e quindi ha la forma $f_v = \kappa\eta$.

[7] Si verifichi che $\|\eta\| = 1$ e $\langle \eta, v\rangle = \langle \eta, w + \alpha n\rangle = 0$.

[8] Il segno meno dipende dal fatto che la terra ruota, nelle nostre coordinate, in senso antiorario.

Ora che abbiamo una espressione dello spostamento nelle coordiante che ci interessano e sappiamo quanto vale la forza, possiamo studiare la(1.3.1). Moltiplicando (1.3.1) per η, v e $\tilde{w} = w + \alpha(\varphi)n$, e usando (1.3.3), si ottiene

$$\begin{aligned}
&m\langle \eta, \ddot{z}\rangle = \kappa + \langle \eta, f_g\rangle \\
&m(2r'\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi - 2r\sin\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\ddot{\theta}\cos\varphi) = \langle v, f_g\rangle \\
&m(2r'\dot{\varphi}^2 + r\sin\varphi\cos\varphi\dot{\theta}^2 + r\ddot{\varphi}) + m\alpha\Big(r''\dot{\varphi}^2 + r'\ddot{\varphi} + \\
&\quad - r(\cos\varphi)^2\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\Big) = \langle \tilde{w}, f_g\rangle.
\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

La prima equazione semplicemente definisce κ, quindi possiamo ignorarla. Per determinare f_g si noti che se un punto materiale è fermo sulla superficie terrestre, rimane fermo.[9] Questo significa che $\ddot{\vartheta}(t) = \dot{\vartheta}(t) = \ddot{\phi}(t) = \dot{\varphi}(t) = 0$ è una soluzione delle equazioni del moto, quindi[10]

$$\begin{aligned}
&\langle v, f_g\rangle = 0 \\
&\langle \tilde{w}, f_g\rangle = mr\omega^2\left[\sin\varphi\cos\varphi - \alpha(\cos\varphi)^2\right].
\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Da cui segue che, nelle coordinate ϑ, ϕ, le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned}
&r\ddot{\vartheta}\cos\varphi = -2r'(\dot{\vartheta} - \omega)\dot{\phi}\cos\varphi + 2r\sin\varphi(\dot{\vartheta} - \omega)\dot{\phi} \\
&r\left(1 + \frac{(r')^2}{r^2}\right)\ddot{\phi} = -2r'\dot{\phi}^2 - r\sin\varphi\cos\varphi(\dot{\vartheta}^2 - 2\omega\dot{\vartheta}) - \frac{r''r'}{r}\dot{\phi}^2 \\
&\qquad\qquad + r'(\cos\varphi)^2(\dot{\vartheta}^2 - 2\omega\dot{\vartheta}) + r'\dot{\phi}^2.
\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Se vogliamo descrivere il moto visto da una persona che si trova nel punto $S(\theta_0 - \omega t, \varphi_0)$ e che avviene su di una scala molto piccola rispetto al raggio terrestre, è naturale usare le coordinate $(\xi_1, \xi_2) = r(\varphi_0)(\vartheta\cos\varphi_0, \phi\sqrt{1 + \alpha(\varphi_0)^2})$. Poiché

$$\begin{aligned}
S(\theta_0 - \omega t + \vartheta(t), \varphi_0 + \phi(t)) - S(\theta_0 - \omega t, \varphi_0) &= \xi_1(t)v(\theta_0 - \omega t) \\
&\quad + \hat{w}(\theta_0 - \omega t, \varphi_0)\xi_2(t) + \mathcal{O}(r^{-1}\|\xi\|^2)
\end{aligned}$$

ne segue che tali coordinate sono approssimativamente cartesiane. Inoltre se $\|\xi\| \leq 100$ m, $\|\dot{\xi}\| \leq 10$m/s, e $\|\ddot{\xi}\| \leq 10$ m/s^2. Allora $|\phi| + |\vartheta| \leq 10^{-4}$, $|\dot{\phi}| + |\dot{\vartheta}| \leq 10^{-5}$ e $|\ddot{\phi}| + |\ddot{\vartheta}| \leq 10^{-5}$ che permette di scrivere

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi}_1 &= -2\omega\sin\varphi_0\xi_2 + \mathcal{O}(10^{-5}) \\
\ddot{\xi}_2 &= 2\omega\sin\varphi_0\xi_1 + \mathcal{O}(10^{-5}),
\end{aligned}$$

[9] Infatti se il punto fa parte della supeficie terrestre questa è in equlibrio e quindi non si muove.

[10] Quello che stiamo facendo con questo argomento è semplicemente misurare la forza nel caso statico.

ovvero

$$m\ddot{\xi} = -2m \sin\varphi_0 \omega J \dot{\xi} + \mathcal{O}(10^{-5}), \tag{1.3.8}$$

dove abbiamo introdotto la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si noti che per le velocità considerate $\omega\|\dot{\xi}\| \sim 10^{-3}$, dunque l'errore è assai più piccolo del termine che abbiamo calcolato.

Si noti che il segno di $\sin\varphi_0$ cambia a seconda dell'emisfero in cui ci si trova ed è nullo sia ai poli che all'equatore.

Vediamo quindi che nel sistema di riferemento, non inerziale, solidale con la terra il moto avviene come se ci fossero una forza aggiuntiva (oltre alla forza di gravità e alla reazione vincolare che manditene il corpo sulla superficie terrestre impedendendogli di sprofondare): la forza detta di Coriolis

$$F_C = -2m \sin\varphi_0 \omega J \dot{\xi}$$

perpendicolare alla direzione del moto in senso antiorario nell'emisfero nord e in senso orario nell'emisfero sud.

Commento 1.3.1. *Riassumiamo quello che abbiamo fatto: abbiamo usato la velocità angolare dalla terra (ovvero che il giorno dura 24 ore). Una stima approssimata del raggio terrestre (molto peggiore di quella ottenuta da Eratostene circa 2200 anni fa in Alessandria).*[11] *La legge di Newton sul moto nei sistemi di riferimento inerziali pubblicata da Newton nei suoi* The Principia: mathematical principles of natural philosophy*, [4], nel 1687. Infine abbiamo usato la assunzione che la reazione vincolare è perpendicolare alla superficie terrestre. Come vedremo questo è un caso speciale del concetto di vincolo, adombrato almeno da Galileo ma sistematizzato da Johann Bernoulli e D'Alembert nella prima metà del 1700.*

Usando questi ingredienti abbiamo costruito un modello matematico e, studiandolo, abbiamo scoperto l'esistenza della forza *di Coriolis che implica che il moto sulla superficie terrestre non è rettilineo e, con un poco più di lavoro, spiega, per esempio, il senso di rotazione degli uragani.*

Esercizio 1.3.2. *Si verifichi che, per ogni $\rho > 0, \alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \rho(\cos\theta(t+\alpha), \sin\theta(t+\alpha)), \\ \theta(t) &= -\frac{\omega \sin 2\varphi_0}{\cos\varphi_0} t, \end{aligned}$$

è una soluzione di $m\ddot{\xi} = -2m \sin\varphi_0 \omega J \dot{\xi}$.

[11] Sfortunatamente solo pochi frammenti sono sopravvissuti del trattato *Geographika* di Eratostone, quindi ci dobbiamo basare su fonti secondarie per la ricostruzione dei suoi risultati e metodi.

Esercizio 1.3.3. *Si stimi la forma della terra assumento che sia liquida, la superficie sia in equilibrio e la forza di gravità sia data da* $-mg\,n(\theta, \varphi)$*, con* $g = 9.8ms^{-2}$.[12] *(Suggerimento: si ottenga una equazione differenziale per* r *e la si approssimi con una che si sa risolvere.)*

Esercizio 1.3.4. *Si veda cosa producono le equazioni precedenti in casi diversi (vicino ai poli, ad alte velocità, su grandi scale etc...).*

Esercizio 1.3.5. *Si studi lo stesso problema per un proiettile.*

Commento 1.3.6. *Si noti l'importanza delle assunzioni che si fanno in un modello: poichè ogni modello è approssimato, se ci si dimentica del dominio di valità del modello si rischia di calcolare un effetto più piccolo della precisione del modello, e quindi assolutamente non indicativo del fenomeno che si sta descrivendo.*

La lettrice potrebbe, giustamente, essere insoddisfatta per la deduzione delle equazione del moto che coinvolge un mucchio di calcoli algebrici poco trasparenti e sembra non ovvia da generalizzare. Una deduzione più concettuale e generale è possibile ma richiede un alcune considerazioni teoriche preliminari. Il lettore curioso può andare direttamente alla sezione 6. Tuttavia la deduzione precedente è istruttiva in quanto mostra come sia possibile cercare di risolvere un problema usando la forza bruta, senza sviluppare una teoria e una comprensione generale, ma spesso questa strada, seppur percorribile, è assai faticosa.

[12] Come vedremo in seguito, la forza di gravità è diretta verso il centro della terra se la terra è sferica. Nel caso della terra questa ipotesi è incorretta. Tutavia, come prima approssimazione, vale la pena di esplorarla.

Chapter 2

Gravità e meccanica celeste

2.1 Gravità tra punti materiali

La forza di gravità che un *punto materiale*[1] situato in $\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ e di massa inerziale m_2 esercita su di un punto materiale posto in $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^3$ e di massa inerziale m_1 è data da

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = G\frac{m_1 m_2(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)}{\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|^3} \;, \tag{2.1.1}$$

dove G è una costante universale che deve essere determinata sperimentalmente. In questa nota ci vogliamo, inizialmente, occupare del seguente semplice problema. Assumendo che un pianeta sia una sfera e consista di un insieme molto grande di punti materiali molto vicini tra di loro. Quale è la forza $\boldsymbol{F}$ esercitata dalla terra su un punto materiale di massa m che sta ad una altezza $h > 0$ sulla superficie del pianeta?

2.2 Che fare con tanti punti materiali?

Il modello del pianeta è stato lasciato un poco troppo nel vago, per fare un conto matematico occorre renderlo assai più preciso. In generale dobbiamo discutere la distribuzione di massa di un corpo esteso. Cominciamo da un semplice esempio: un solido descritto da un insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ con struttura cristallina, ovvero formato di punti materiali, tutti di ugual massa m_ε, disposti ai vertici di un reticolo[2] cubico[3] di passo ε. Più precisamente il pianeta è composto dai punti

[1]Per *punto materiale* si intende un oggetto idealizzato che ha massa ma non estensione, ovvero la cui estensione è trascurabile rispetto a tutte le altre grandezze che si stanno considerando.

[2]Un reticolo è un sottogruppo di $\mathbb{R}^3$. In generale si può scrivere come $\{av_1 + bv_2 + cv_3\}_{(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3}$ dove $\{v_1, v_2, v_3\}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

[3]Significa che $v_1 = \ell(1,0,0)$, $v_2 = \ell(0,1,0)$ e $v_3 = \ell(0,0,1)$ per un qualche $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$ detto *passo del reticolo*.

materiali $\{\varepsilon \boldsymbol{z}\}_{\boldsymbol{z}\in A_\varepsilon}$ dove $A_\varepsilon = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^3 \;:\; \varepsilon \boldsymbol{z} \in A\}$. Dunque, la sua massa totale è

$$M_A = \sum_{\boldsymbol{z}\in A_\varepsilon} m_\varepsilon.$$

Esercizio 2.2.1. *Si mostri che se ∂A è abbastanza regolare (spiegare che significa), allora $\lim_{\varepsilon\to 0} \# A_\varepsilon \varepsilon^3 = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\boldsymbol{z}\in A_\varepsilon} \varepsilon^3 = \int_A 1 dx$, ovvero la misura di Peano-Jordan di A.*

Ne segue che M_A è essenzialmente indipendente da ε a patto che $m_\varepsilon = \rho\varepsilon^3$ e che ε sia molto piccolo.

Esercizio 2.2.2. *Si mostri che le conclusioni dell'esercizio 2.2.1 valgono anche se i punti materiali sono disposti su di un reticolo non cubico (per esempio la cella unitaria è un parallelepipedo oppure un cilindro a base esagonale). Oppure se ci sono due (o più) tipi di punti materiali con masse diverse disposti regolarmente sul reticolo.*

Esercizio 2.2.3. *Si mostri che le conclusioni dell'esercizio 2.2.1 valgono anche se i punti materiali sono distribuiti casualmente con una distribuzione uniforme. (Suggerimento: si usi la legge dei grandi numeri.)*

In tutti questi casi $m_\varepsilon = M_A(\# A_\varepsilon)^{-1} = \rho\varepsilon^3$, per ogni regione A sufficientemente regolare. Il numero ρ è la *densità* del solido e ha le dimensioni kg/m^3.

Si noti che la proprietà essenziale che permette di definire la densità è l'omeogenità del materiale. Questo significa assumere che la disposizione della massa è *essenzialmente* invariante per traslazioni.[4] Per capire che significa *essenzialmente* occorre una piccola digressione sulle scale della nostra descrizione del mondo. Al momento abbiamo due scale: una *microscopica* (ε) e una *macroscopica* (1), queste differiscono per vari ordini di grandezza ed è quindi naturale considerare scale intermedie (oggi molto di moda in quanto relate alle *nanotecnologie*). Tale scala è chiamata *mesoscopica* ed ha la caratteristica di essere grande dal punto di vista microscopico ma molto piccola da quello macroscopico.[5] Nel vostro caso assumeremo che tale scala sia data da ε^b per un qualche $b \in (0,1)$ (tipicamente, per semplictà $b = \frac{1}{2}$). Data una regione $A \subset \mathbb{R}^3$, $0 \in A$, con bordo regolare e $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ si definisca $A_{\varepsilon,b,\boldsymbol{a}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;:\; \varepsilon^{-b}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \in A\}$. Si tratta di una copia riscalata di A traslata nel punto $\boldsymbol{a}$. La cosa interessante è che molto spesso le proprietà sulla scala mesoscopia non dipendono dai dettagli della struttura microscopica (nel nostro caso il tipo di lattice o di distribuzione, magari causale, dei punti materiali.)

Esercizio 2.2.4. *Con la notazione precedente, si mostri che per ogni scelta della struttura microscopica precedentemente discussa, detta $m(\varepsilon, \boldsymbol{a})$ la massa*

[4] Per traslazione si intende una mappa $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ del tipo $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ per qualche $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$.

[5] Tipicamente questi *microscopico* e *macroscopico* differiscono di vari ordini di grandezza, ad esempio un fattore $\varepsilon = 10^8$. Mentre la scala *mesoscopica* è tale da essere difficilmente distinguibile dal punto di vista macroscopico ma molto grande da quello microscopico, ad esempio se la scala macroscopica è di ordine 1, potrebbe essere 10^{-4}.

di $A_{\varepsilon,b,\boldsymbol{a}}$ si ha

$$m(\varepsilon,\boldsymbol{a}) = \rho \operatorname{Vol}(A_{\varepsilon,b,\boldsymbol{a}}) + o(\varepsilon^{3b}) = \rho\varepsilon^{3b} \operatorname{Vol}(A) + o(\varepsilon^{3b}).$$

(Suggerimento: per gli argomenti precedenti dove ε è sostituito da ε^b più un cambio di variable per la seconda uguaglianza.)

Il fatto che la massa non dipenda da $\boldsymbol{a}$ esprime esattamente quello che si intende per *materiale omogeneo.*

Tuttavia i corpi che ci circondano non sono omogenei, dunque come descriverli? Una semplice possibilità è di assumere che siano *localmente omogenei.* Questo significa che

$$m(\varepsilon,\boldsymbol{a}) = \rho(\boldsymbol{a})\varepsilon^{3b} \operatorname{Vol}(A) + o(\varepsilon^{3b}).$$

con $\rho \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_{\geq 0})$. Nel seguito assumeremo che i corpi che consideriamo abbiano localmente una struttura come sopra. Dunque assumiamo che ad ogni punto $\boldsymbol{x}$ del solido sia associata una densità $\rho(\boldsymbol{x})$ e che tale densità vari in modo continuo nel solido.[6]

2.3 Forza prodotta da un corpo solido a simmetria sferica al suo esterno

Per fissare le idee, consideriamo un pianeta tale che la sua densità ρ sia sfericamente simmetrica, ovvero $\rho = \rho(\|\boldsymbol{x}\|)$. Per esprimere la forza, è conveniente scegliere le coordinate in modo che il punto materiale abbia coordinate $\boldsymbol{x} = (0, 0, R+h)$. Con le ipotesi precedenti, detto $S_\varepsilon \subset S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \|x\| \leq R\}$ l'insieme delle posizioni dei punti materiali (che sono assunti avere una distanza di ordine ε) si ha

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \sum_{\boldsymbol{z}\in S_\varepsilon} G\frac{mm_\varepsilon(\boldsymbol{z})\varepsilon^3(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|^3}.$$

Possiamo allora introdurre un reticolo di passo $\sqrt{\varepsilon}$ che consiste di un cubo di lato $\sqrt{\varepsilon}$ attorno ad ogni punto $\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^3$. Per quanto detto nella sezione precedente la massa in tale cubetto sarà data da $\rho(\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{z}\|)\varepsilon^{\frac{3}{2}} + o(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$. Dunque, ponendo $\hat{S}_\varepsilon = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^3 \ : \ \sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{z} \in S\}$, poichè $h > 0$,

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon = \sum_{\boldsymbol{z}\in\hat{S}_\varepsilon} G\frac{m\rho(\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{z}\|)\varepsilon^3(\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{z}\|^3}\varepsilon^{\frac{3}{2}} + o(1)\ . \tag{2.3.1}$$

[6] Questo fa parte del nostro modello di un corpo solido. Le ragioni del cambio di densità possono essere molteplici. Ad esempio il passo del reticolo può cambiare su scala mesoscopica (ad esempio a causa della pressione), oppure se si ha una mistura di due tipi di punti materiali, le cui proporzioni possono cambiare. Ovviamente si possono avere dei salti discontinui di densità (ad esempio per una transizione di fase, e.g., da acqua a ghiaccio, oppure perchè cambia il tipo di materiale, e.g. da ferro a granito). In questo caso, consistentemente con l'uso comune, interpreteremo le discontinuità come superfici di divisione tra corpi diversi.

Esercizio 2.3.1. *Si mostri che il limite* $\boldsymbol{F} = \lim_{\varepsilon\to 0} \boldsymbol{F}_\varepsilon$ *esiste e*

$$\boldsymbol{F} = Gm \int_S \frac{\rho(\|\boldsymbol{z}\|)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|^3} dz \ . \tag{2.3.2}$$

(Suggerimento: si riconosca che (2.3.1) è una somma di Riemann e che la funzione integrata è continua poichè $h > 0$*).*

Dunque, anche la forza di gravità non dipende in maniera significativa da ε, se ε è sufficientemente piccolo.

Ci proponiamo ora di calcolare l'integrale in (2.3.2).

Esercizio 2.3.2. *Si mostri, usando le coordinate sferiche, che l'integrale in (2.3.2) si scrive come*

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \, \rho(r) r^2 \sin\varphi \frac{(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi - R - h)}{[r^2 - 2(R+h)r\cos\varphi + (R+h)^2]^{\frac{3}{2}}} \ . \tag{2.3.3}$$

Inoltre, si verifichi che le prime due componenti del vettore in (2.3.3) sono nulle. (Suggerimento, si usi il teorema di Fubini e si integri in $d\theta$*).*

Esercizio 2.3.3. *Si mostri che la terza componente che compare in (2.3.3) si può scrivere nel modo seguente:*

$$-\frac{4\pi}{(R+h)^2} \int_0^R dr \, r^2 \rho(r).$$

Svolgimento dell'Esercizio 2.3.3. Dapprima, si integri rispetto a θ; successivamente, si effettui la sostituzione $\eta = R + h - r\cos\varphi$; inoltre, integrando per parti, si giustifica la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned}
&\int_0^R dr \int_0^{\pi} d\varphi \, \rho(r) r^2 \sin\varphi \frac{r\cos\varphi - R - h}{[r^2 - 2(R+h)r\cos\varphi + (R+h)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad = 2\pi \int_0^R dr \, \frac{r\rho(r)}{R+h} \Big\{ \eta \big[r^2 + 2(R+h)\eta - (R+h)^2 \big] \Big\}^{-\frac{1}{2}} \Big|_{\eta = R+h-r}^{\eta = R+h+r} \\
&\qquad - 2\pi \int_0^R dr \, \frac{r\rho(r)}{R+h} \int_{R+h-r}^{R+h+r} d\eta \, \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2(R+h)\eta - (R+h)^2}} \\
&\quad = 2\pi \int_0^R dr \frac{r\rho(r)}{R+h} \left(\frac{R+h+r}{|R+h+r|} - \frac{R+h-r}{|R+h-r|} \right) \\
&\qquad - 2\pi \int_0^R dr \, \frac{r\rho(r)}{(R+h)^2} \Big(|R+h+r| - |R+h-r| \Big) \\
&= -\frac{4\pi}{(R+h)^2} \int_0^R dr \, r^2 \rho(r) \ .
\end{aligned}$$

□

Unendo le tre affermazioni riportate negli esercizi 2.3.1–2.3.3, si ottiene che la forza è data dalla formula (scoperta, nel caso $\rho(r) = \rho$, da Newton [4, Proposizione VIII–Teorema VIII, Vol. 2])

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= Gm \int_S \frac{\rho(\|\boldsymbol{z}\|)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|^3} dz = -\frac{Gm}{(R+h)^2}\left[4\pi \int_0^R dr\, r^2 \rho(r)\right] \boldsymbol{e}_z \\ &= -\frac{GmM_S}{(R+h)^2}\boldsymbol{e}_z \ , \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

dove il versore $\boldsymbol{e}_z$ (nel sistema di coordinate scelto) individua la direzione congiungente il centro del pianeta (a forma sferica) con il punto materiale su cui viene esercitata la forza; inoltre, per un corpo la cui densità è a simmetria sferica, è facile calcolare che $M_S = M(S) = 4\pi \int_0^R dr\, r^2\rho(r)$. Dunque misure gravimetriche sulla superficie non forniscono alcuna informazione sulla struttura interna del pianeta (a parte la sua eventuale simmetria sferica). L'equazione (2.3.4) ci consente di trarre una prima importantissima conclusione: il punto materiale è soggetto alla stessa forza che sentirebbe se il pianeta fosse un punto materiale di massa $M(S)$ posto al centro dello stesso.

Si noti infine che la formula non ha alcun problema per $h = 0$, questo significa che in questo caso si può tranquillamente interpretare l'integrale come un integrale improprio.

Esercizio 2.3.4. *Si studi il caso $h < 0$. (suggerimento: Si riduca il problema allo studio di un integrale improprio.)*

Vediamo infine cosa succede se abbiamo due sfere S_i, di centro C_i densità ρ_i e raggi r_i, che si attirano e i cui centri sono a distanza $r = \|C_1 - C_2\|$ e la somma dei raggi è minore di $r > r_1 + r_2$ (e dunque sono esterne l'una all'altra). Con lo stesso ragionamento fatto sopra la forza tra le due sfere è data da:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= G \int_{S_1 \times S_2} \frac{\rho_1(\|\boldsymbol{z}_1\|)\rho_2(\|\boldsymbol{z}_2\|)(\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2)}{\|\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2\|^3} d\boldsymbol{z}_1 d\boldsymbol{z}_2 \\ &= G \int_{S_2} d\boldsymbol{z}_2 \rho_2(\|\boldsymbol{z}_2\|) \int_{S_2} d\boldsymbol{z}_1 \frac{\rho_1(\|\boldsymbol{z}_1\|)(\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2)}{\|\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2\|^3} \\ &= G \int_{S_2} d\boldsymbol{z}_2 \rho_2(\|\boldsymbol{z}_2\|) \frac{M_1(C_1 - \boldsymbol{z}_2)}{\|C_1 - \boldsymbol{z}_2\|^3} \\ &= \frac{GM_1M_2(C_2 - C_1)}{r^3}, \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

dove abbiamo prima usato Fubini e poi due volte l'equazione (2.3.4).

È quindi giustificato il modello in cui i pianeti sono punti materiali, persino in un caso come la terra e la luna o un satellite artificiale e la terra dove le dimensioni dei corpi non sembrano affatto trascurabili. Che dire?! Newton ha avuto fortuna.

2.4 Gravitazione univerale: di Mele e di lune

La teoria Newtoniana è spesso chiamata della gravitazione **universale**, vediamo perchè e quale sia la rilevanza di questa parola.

Prima di tutto bisogna capire il periodo storico, per dirla in una parola: i Principia di Newton sono stati pubblicati nel 1687 mentre Giordano Bruno era stato bruciato nel 1600 per avere (tra l'altro) osato negare la separazione tra cielo e terra. Sebbene nel frattempo molto fosse accaduto, l'idea che la terra e il cielo fossero due regni separati (la corruzione e la perfezione) e tra loro non ci fosse alcuno scambio (a parte l'occasionale miracolo) era ancora decisamente radicata.

Il punto della storia della mela, probabilmente apocrifa, è che incenerisce completamente questa separazione.

Per capire quanto sia rivoluzionaria questa idea, consideriamo la storiella assurda di un genio immaginario. Pensate di essere all'inizio del sedicesimo secolo e considerare il caso di una mela (terrestre e peritura) e della luna (celeste e imperitura) e osate fare, magari nel segreto della vostra stanzetta, l'ardita assunzione che su entrambe agisca la stessa forza (la gravità *universale*, appunto). Non solo ma, sulla soglia della blasfemia, assumete anche che la formula $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ sia valida, e non solo sulla terra ma anche nell' iperuranio stellato. Infine, assumete che la luna compia una orbita circolare attorno alla terra (il vostro amico Keplero vi ha detto, poco prima di morire, che è una ellisse, ma l'eccentricità e piccola per cui questo non comporta un grande errore). Ne segue che l' accelerazione deve essere uguale alla forza di gravità. Sia R il raggio dell'orbita lunare e sia la terra al centro delle coordinate, allora (scegliendo la terza coordinata perpendicolare al piano dell'orbita) si ha che l'orbita lunare è data da $\boldsymbol{r}(t) = R(\cos(2\pi T^{-1}t), \sin(2\pi T^{-1}t), 0)$, dove T è il periodo (circa 27 giorni$\sim 2.3 \cdot 10^6$ secondi). Segue che

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = -4\pi^2 R T^{-2}(\cos(2\pi T^{-1}t), \sin(2\pi T^{-1}t), 0).$$

Dalla (2.3.5) segue quindi che deve essere

$$\frac{G M_T M_L}{R^2} = 4\pi^2 M_L R T^{-2}$$

dove M_T, M_L sono la massa totale della terra e della luna, rispettivamente. Ovvero

$$G M_T = 4\pi^2 R^3 T^{-2}.$$

Veniamo alla mela. Cadendo, visto che l'altezza dell'albero è trascurabile rispetto al raggio terrestre, è sottoposta all' accelerazione

$$a = \frac{G M_T}{R_T^2}$$

dove R_T è il raggio terrestre. Ovvero, se cielo e terra fossero identici, dovrebbe essere:

$$a R_T^2 = G M_T = 4\pi^2 R^3 T^{-2}.$$

Ma questa è una previsione! Quindi, da buoni scienziati, occorre fare delle misure per verificare se la previsione è corretta oppure no. Per fortuna queste misure esistono già: $a = 9.8$ m/s^2 (Galileo 1600), $R_T = 6314500$ m (Eratostene 230 a.c.), R =384.000 Km (Ipparco 200 ac).[7] Vediamo quindi che succede

$$\begin{aligned}
&aR_T^2 \sim 9.8 \cdot (6.3 \cdot 10^6)^2 \sim 3.9 \cdot 10^{14} \\
&4\pi^2 R^3 T^{-2} = 4\pi^2 (3.8 \cdot 10^8)^3 (2.3 \cdot 10^6)^{-2} \sim 4.1 \cdot 10^{14}.
\end{aligned}$$

Una differenza del 5% ! Considerando le approssimazioni fatte e tutti gli effetti trascurati (e.g. la terra non è esattamente sferica, l'orbita lunare non è esattamente circolare, la luna non orbita attorno alla terra ma attorno al comune centro di gravità, la gravità terrestre è modificata dalla forza centripeta dovuta alla rotazione della terra ...) si tratta di una precisione stupefacente che lascia pochi dubbi sul fatto che la terra e il cielo siano fatti della stessa pasta.

Magari siate prudenti e non andate a dirlo in giro, c'è gente dal cerino facile. Meglio aspettare qualche decennio che Newton dica la sua.

2.5 Moti centrali

Dalla sezione 2.3 abbiamo che, dati due corpi sferici di massa M e m e di centro $x, y \in \mathbb{R}^3$, rispettivamente, il potenziale è dato da

$$U(x, y) = -\frac{GMm}{\|x - y\|}(x - y).$$

Ne segue che le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned}
M\ddot{x} &= -\partial_x U = \frac{GMm}{\|x - y\|^3}(x - y) \\
m\ddot{y} &= -\partial_x U = \frac{GMm}{\|x - y\|^3}(y - x).
\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Si noti che (2.5.1) corrisponde ad un sistema del primo ordine di 12 equazioni.

Come abbiamo già visto è conveniente introdurre il centro di massa $X(t) = (M + m)^{-1}[Mx(t) + my(t)]$ e la distanza tra i due corpi $z(t) = x(t) - y(t)$. In queste coordinate le (2.5.1) diventano

$$\begin{aligned}
&\ddot{X} = 0 \\
&\ddot{z} = \frac{G\mu}{\|z\|^3} z,
\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

dove $\mu = m + M$. La prima equazione da $X(t) = X(0) + \dot{X}(0)t$, ovvero il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme. Rimane quindi da studiare solo

[7] Le misure riportate sono tutte errate circa del 5% che se pensate a quando sono state fatte c'è da levarsi tanto di cappello.

l'equazione in z ovvero ci siamo ridotti a studiare un sistema del primo ordine in sei equazioni.

Sia $\eta \in \mathbb{R}^3$, $\|\eta\| = 1$, tale che $\langle \eta, z(0)\rangle = \langle \eta, \dot z(0)\rangle = 0$. Detto $\xi(t) = \langle \eta, z(t)\rangle$ abbiamo

$$\ddot\xi = \frac{G\mu}{\|z\|^3}\xi.$$

Si noti che $\xi(t) = 0$ è una soluzione della equazione che soddisfa le condizioni iniziali e, per l'unicità delle soluzioni, è quindi la soluzione. Scegliendo opportunamente le coordinate possiamo quindi assumere che $\eta = e_3$, ovvero il moto avviene in un piano. In altre parole $z(t) = (\zeta(t), 0)$ con $\zeta \in \mathbb{R}^2$. Le equazioni sono quindi

$$\ddot\zeta = \frac{G\mu}{\|\zeta\|^3}\zeta, \tag{2.5.3}$$

che è equivalente ad un sistema del primo ordine in quattro equazioni.

La prossima idea è di usare le coordinate polari:

$$\zeta = rv(\theta) \tag{2.5.4}$$

dove $n(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Ponendo $n(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ si noti che

$$\ddot\zeta = \ddot r v(\theta) + 2\dot r n(\theta)\dot\theta - rv(\theta)(\dot\theta)^2 + rn(\theta)\ddot\theta.$$

Da cui segue

$$\begin{aligned} \ddot r &= -\frac{G\mu}{r^2} + r(\dot\theta)^2 \\ 0 &= r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta = r^{-1}\frac{d}{dt}\left[r^2\dot\theta\right]. \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Ne segue che la quantità $\ell = r^2\dot\theta$ (detta *momento angolare*) è conservata dalla dinamica. Dunque

$$\ddot r = -\frac{G\mu}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^3} \tag{2.5.6}$$

Abbiamo quindi il problema è risolto se risolviamo l'equazione per r. Ovvero ci siamo ridotti allo studio di un sistema del primo ordine in due equazioni. Assumiamo $\ell > 0$.[8] Si noti che $\dot\theta > 0$ e quindi θ è una funzione monotona di t. Possiamo quindi parametrizzare il moto con θ invece che con t. A questo scopo definiamo $u(\varphi) = \frac{1}{r(\theta^{-1}(\varphi))}$ dove θ^{-1} è la funzione inversa di $\theta(t)$. Un calcolo diretto mostra che

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi}u &= -\frac{\dot r}{r^2\dot\theta} = -\frac{\dot r}{\ell} \\ \frac{d^2}{d\varphi^2}u &= -\frac{\ddot r}{\ell\dot\theta} = -\frac{r^2\ddot r}{\ell^2} = -\frac{\ddot r}{u^2\ell^2}. \end{aligned}$$

[8]Il caso $\ell = 0$ corrisponde ad un corpo che cade verso il centro lungo una retta, caso che abbiamo già discusso. Il caso $\ell < 0$ è completamente analogo ed è lasciato alla lettrice.

Sostituendo in (2.5.7) si ottiene

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}u = \frac{G\mu}{\ell^2} - u \tag{2.5.7}$$

Che, finalmente, sappiamo risolvere. Infatti la soluzione è data da

$$u(\varphi) = \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{G\mu}{\ell^2}.$$

Esercizio 2.5.1. *Si verifichi che*

$$r(\theta) = \frac{1}{e + \cos(\theta - \theta_0)}$$

è una conica.