Esercizi per casa. 1

Esercizio 0.1. *Si stimi la forma della terra assumento che sia liquida, la superficie sia in equilibrio e la forza di gravità sia data da* $-mg\, n(\theta, \varphi)$, *con* $g = 9.8ms^{-2}$.[1] *(Suggerimento: si ottenga una equazione differenziale per* r *e la si approssimi con una che si sa risolvere.)*

Esercizio 0.2. *Due particelle puntiformi, rispettivamente di massa* M *e* m, $M > m$, *si muovono su di una retta orizzontale in assenza di forze con condizioni iniziali* $X(0) = -1$, $\dot{X}(0) = 1$ *e* $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, *rispettivamente. Se ne descriva il moto tenendo conto che la loro eventuale collisione è elastica (ovvero durante la collisione si conservano sia il momento totale che l'energia totale).*

[1] La forza di gravità è diretta verso il centro della terra se la terra è sferica. Nel caso della terra questa ipotesi è incorretta. Tutavia, come prima approssimazione, vale la pena di esplorarla.

Soluzione dell'esercizio (0.1)**.** *Abbiamo visto che il moto in coordinate sferiche si scrive come*

$$mg\,\alpha + mr\omega^2 \cos\varphi(\sin\varphi + \alpha\cos\varphi) = 0.$$

Ovvero

$$r' = -\frac{r\omega^2\cos\varphi\sin\varphi}{\omega^2\cos\varphi\cos\varphi + r^{-1}g}.$$

Poichè $\omega^2 \ll r^{-1}g$*, possiamo approssimare tale equazione con*

$$-r' = \frac{r^2\omega^2\cos\varphi\sin\varphi}{g},$$

ovvero

$$\frac{d}{d\varphi}r^{-1} = \frac{\omega^2}{2g}\frac{d}{d\varphi}(\sin\varphi)^2.$$

Integrando si ottiene

$$r(\varphi)^{-1} - r(0)^{-1} = \frac{\omega^2}{2g}(\sin\varphi)^2$$

Ovvero

$$r(\varphi) = \frac{r(0)}{1 + r(0)\frac{\omega^2}{2g}(\sin\varphi)^2}.$$

Si noti che $r(0)\frac{\omega^2}{2g} \sim 1.6\,10^{-3}$ *mentre lo schiacciamento della terra, come abbiamo detto, è circa* $3\,10^{-3}$*. Quindi abbiamo spiegato parte dell'effetto ma non tutto. Il problema evidentemente risiede nella assunzione che la forza di gravità sia diretta verso il centro della terra.*

Soluzione dell'esercizio (0.2)**.** *La prima particella si muove di moto rettilineo uniforme e collide al tempo uno in zero con la particella ferma. Per un urto generico, usando il* $-$ *e il* $+$ *per le quantità prima e dopo la collisione, rispettivamente, le leggi di conservazione sono*

$$\begin{aligned} M\dot{X}_+ + m\dot{x}_+ &= M\dot{X}_- + m\dot{x}_- \\ M\dot{X}_+^2 + m\dot{x}_+^2 &= M\dot{X}_-^2 + m\dot{x}_-^2. \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} &M(\dot{X}_+ - \dot{X}_-) = m(\dot{x}_- - \dot{x}_+) \\ &M(\dot{X}_+ - \dot{X}_-)(\dot{X}_+ + \dot{X}_-) = m(\dot{x}_- - \dot{x}_+)(\dot{x}_- + \dot{x}_+). \end{aligned}$$

Dunque deve essere $(\dot{X}_+ + \dot{X}_-) = (\dot{x}_- + \dot{x}_+)$*. Ponendo* $\Delta = \dot{X}_+ - \dot{X}_-$ *e* $\delta = \dot{x}_+ - \dot{x}_-$ *si ha quindi*

$$\begin{aligned} &M\Delta = -m\delta \\ &\Delta = \delta + 2(\dot{x}_- - \dot{X}_-). \end{aligned}$$

Ovvero,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2M}{m+M}(\dot{X}_- - \dot{x}_-) \\ \Delta &= \frac{2m}{m+M}(\dot{x}_- - \dot{X}_-). \end{aligned}$$

Dunque

$$\dot{X}_+ = \frac{M-m}{m+M}\dot{X}_- + \frac{2m}{m+M}\dot{x}_-$$
$$\dot{x}_+ = \frac{m-M}{m+M}\dot{x}_- + \frac{2M}{m+M}\dot{X}_-.$$

Sostituendo le condizioni iniziali si ha che dopo la collisione

$$\dot{X}_+ = \frac{M-m}{m+M}$$
$$\dot{x}_+ = \frac{2M}{m+M}.$$

Si noti che $\dot{X}_+ < \dot{x}_+$ *quindi le due particelle non posso più collidere e conseguentemente dalla collisione in poi si muoveranno di moto rettilineo uniforme con velocità* $\dot{x}_+$ *e* $\dot{X}_+$*, rispettivamente.*