CORPI RIGIDI

CARLANGELO LIVERANI

1. Tre punti nel piano

Si considerino 3 punti non collineari in $\mathbb{R}^2$ che soddisfano i vincoli

$$\|x_i - x_j\| = r_{i,j} > 0 \tag{1.1}$$

per ogni $i > j \in \{1, \dots, 3\}$. Sia $\ell = \|x_1 - x_2\|$ e $v = (x_1 - x_2)\ell^{-1}$ e $n \in \mathbb{R}^2$ il vettore unitario perpendicolare a v e tale che $\langle v, Jn\rangle = 1$ dove $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.[1] Possiamo quindi scrivere $x_3 - x_1 = av + bn$, dunque i vincoli (5.1) si possono scrivere come

$$\begin{aligned}
&r_{1,2} = \ell \\
&r_{1,3}^2 = a^2 + b^2 \\
&r_{2,3}^2 = \|x_3 - x_1 + x_1 - x_2\|^2 = (a+\ell)^2 + b^2 = a^2 + 2a\ell + \ell^2 + b^2.
\end{aligned}$$

Dunque $a = (r_{2,3}^2 - r_{1,3}^2 - r_{1,2}^2)(2r_{1,2})^{-1}$ e $b^2 = r_{1,3}^2 - a^2$. La seconda equazione ha soluzione solo se $r_{2,3} < r_{1,2} + r_{1,3}$, che è null'altro che la disuguaglianza triangolare. Si noti che l'equazione ha due soluzioni simmetriche rispetto alla linea passante per x_1, x_2.

La posizione dei tre punti è quindi univocamente determinata da x_1, v e il segno di b. Poichè $\|v\| = 1$, esso è univocamente determinato da un angolo $\theta \in \mathbb{T}^1$: $v = (\cos\theta, \sin\theta)$. Possiamo quindi identificare tutte le possibili posizioni dei tre punti con $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1 \times \{-1, +1\}$.

Problema 1. *Si mostri che non esiste alcuna curva continua che unisce* $(x, \theta, +)$ *a* $(x', \theta', -)$.[2]

Ne segue che se vogliamo studiare il moto dei tre punti il segno di b non può cambiare e quindi lo spazio delle configurazioni è $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1$.

2. Quattro punti nello spazio

Si considerino 4 punti non complanari in $\mathbb{R}^3$ che soddisfano i vincoli

$$\|x_i - x_j\| = r_{i,j} > 0 \tag{2.1}$$

per ogni $i > j \in \{1, \dots, 4\}$. Sia $v = (x_1 - x_2)r_{1,2}^{-1}$, $\tilde{w} = (x_1 - x_3)r_{1,3}^{-1}$ e $n \in \mathbb{R}^2$ il vettore unitario perpendicolare a $\operatorname{span}\{v, w\}$ e tale che[3]

$$\operatorname{sign}\left\{\det\begin{pmatrix} v & \tilde{w} & n \end{pmatrix}\right\} = 1 \tag{2.2}$$

Date: May 25, 2021.

[1] Questo fissa semplicemente l'orientamento della base $\{v, n\}$. In particolare $n = -Jv$.

[2] Un moto continuo non può cambiare l'orientamento.

[3] Nuovamente questo determina l'orientamento.

Possiamo ora introdurre la base ortonormale $\{v, w, n\}$ e sappiamo dalla sezione precedente che $x_2 = x_1 + r_{1,2}v$ e $x_3 = x_1 + av + bw$ dove a e $|b|$ sono univocamente determinati. Possiamo quindi scrivere $x_4 = x_1 + \alpha v + \beta w + \gamma n$ da cui segue

$$\begin{aligned} r_{1,4}^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\ r_{2,4}^2 &= (r_{1,2} + \alpha)^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\ r_{2,3}^2 &= (a + \alpha)^2 + (b + \beta)^2 + \gamma^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Problema 2. *Si mostri che le (2.3) hanno soluzione se e solo se tutte le possibili disuguaglianze triangolari sono soddisfatte. Inoltre, se hanno soluzione allora α, β e $|\gamma|$ sono univocamente determinante.*

Ne segue che la posizione dei quattro punti è univocamente determinata dati x_1, v, w e il segno di b e γ. Tuttavia se consideriamo la configurazione data da $x_1, v, -w$ e $-b$, $-\gamma$ notiamo che la condizione (2.2) implica che il terzo vettore normale ora è $-n$ e quindi otteniamo esattamente la stessa posizione per x_2, x_3, x_4. Questo significa che possiamo restringerci al caso $b > 0$, dopo di che le posizioni di x_1, x_2, x_3 sono unicamente fissate mentre x_4 ha solo due possibili posizioni simmetriche rispetto al piano che contiene x_1, x_2, x_3. Come definire le coordinate? Una può essere x_1, le altre sono determinate da v, w, n ovvero da una base di $\mathbb{R}^3$, possiamo quindi identificarla col cambio di coordiante che porta la base standard $\{e_1, e_2, e_3\}$ in v, w, n. Prima di continuare occorre fare una digressione sulle proprietà di tali cambi di variabili.

3. Il gruppo ortogonale

Sia $GL(n, \mathbb{R})$ il gruppo delle matrici n per n. Una matrice invertibile definisce un cambio di base: sia $A \in GL(n, \mathbb{R})$, $\det(A) \neq 0$ e $w_i = Ae_i$ allora se $v = \sum_{i=1}^n a_i w_i$ si ha $v_l = \sum_{i=1}^n a_i A_{li}$, cioè $v = \sum_{i=1}^n A_{li} a_i e_l$.

Problema 3. *Si mostri che $GL(n, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale normato.*[4]

In particolare, abbiamo una distanza definita in $GL(n, \mathbb{R})$ che definisce una topologia. Da ora in poi la assumeremo data.

Problema 4. *Si mostri che il determinante è una funzione continua da $GL(n, \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$.*

Se chiediamo che la nuova base, associata al cambio di variabile, sia ortonormale abbiamo $\delta_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle = \langle e_i, A^T A e_j \rangle$ ovvero $A^T A = \mathbb{1}$. In altre parole $A^T = A^{-1}$ e quindi anche $AA^T = \mathbb{1}$. Si noti inoltre che se $A^T A = \mathbb{1}$ allora $\det(A)^2 = 1$ e quindi $\det(A) = \pm 1$.

Problema 5. *Si mostri che $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^T A = \mathbb{1}\}$ forma un gruppo (il gruppo ortogonale) e lo stesso accade per $SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ (il gruppo ortogonale speciale).*

Problema 6. *Si mostri che date due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ $\{v_i\}$ e $\{w_i\}$ esiste una sola matrice $A \in O(n, \mathbb{R})$ tale che $w_i = Av_i$.*

[4]Infatti si possono definire varie norme, la mia preferita è $\|A\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|$.

Se $\Gamma : [0,1] \to O(n,\mathbb{R})$ è una curva continua allora $\det(\Gamma(t))$ è una funzione continua e quindi non può passare da $+1$ a-1. Se ne evince che $O(n,\mathbb{R})$ è disconnesso.[5]

Ma come è fatto $SO(n,\mathbb{R})$? Se identifichiamo $GL(n,\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{n^2}$ allora $SO(n,\mathbb{R})$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n^2}$.

Problema 7. *Si mostri che la topologia indotta da $\mathbb{R}^{n^2}$ è la stessa indotta dalla norma di cui sopra.*

D'altra parte $\mathbb{R}^{n^2}$ ha una struttura differenziabile, possiamo quindi parlare di curve differenziabili nello spazio delle matrici. È possibile che una curva differenziabile appartenga interamente a $SO(n,\mathbb{R})$? Vediamo: supponiamo $\Gamma : (0,1) \to SO(n,\mathbb{R})$ differenziabile, e $\Gamma(t)^T\Gamma(t) = \mathbb{1}$ per ogni $t \in (0,1)$. Differenziando si ha

$$\Gamma'(t)^T\Gamma(t) + \Gamma(t)^T\Gamma'(t) = 0.$$

Ponendo $\Gamma'(t) = \Gamma(t)B(t)$ si ha $B(t)^T = -B(t)$, ovvero B deve essere una matrice antisimmetrica. Sia $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \ : \ A^T = -A\}$, si noti che è uno spazio vettoriale di dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$.

Allora, data qualunque curva continua $B : (0,1) \to \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ e $A \in SO(n,\mathbb{R})$ l'equazione

$$\begin{aligned} \Gamma'(t) &= \Gamma(t)B(t) \\ \Gamma(0) &= A \end{aligned}$$

ha una unica soluzione che appartiene a $SO(n,\mathbb{R})$. Questo suggerisce l'idea che $O(n,\mathbb{R})$ sia un manifold $\frac{n(n-1)}{2}$ dimensionale . Vediamo di dimostrarlo.

Lemma 3.1. *$O(n,\mathbb{R})$ è compatto.*

Proof. Sia $A \in O(n,\mathbb{R})$, allora, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\|v\|^2 = \langle v, A^TAv\rangle = \langle Av, Av\rangle$$

ovvero

$$\|A\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\| = 1.$$

Dunque $O(n,\mathbb{R})$ è limitato, per concludere basta dimostrare che è chiuso. Supponiamo che $\{A_n\} \subset O(n,\mathbb{R})$ e $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, allora

$$A^TA = \lim_{n\to\infty} A_n^TA_n = \mathbb{1},$$

dunque $A \in O(n,\mathbb{R})$. □

Dato $\bar{A} \in O(n,\mathbb{R})$ consideriamo l'equazione

$$F(A) := A^TA - \mathbb{1} = 0 \tag{3.1}$$

in un intorno di $\bar{A}$. Si noti che possiamo scrivere $A = \bar{A}e^B$, infatti $\bar{A}$ è invertibile e il problema si riduce a risolvere l'equazione $e^B = \bar{A}^{-1}A$ dove $\bar{A}^{-1}A$ è vicino a $\mathbb{1}$.

Lemma 3.2. *Sia $D \in GL(n,\mathbb{R})$, $\|D\| < 1/4$, allora l'equazione $e^B = \mathbb{1} + D$ ha una e una sola soluzione in $\mathcal{B} = \{B \in GL(n,\mathbb{R}) \ : \ \|B\| \le \frac{1}{2}\}$. Inoltre se $[D, D^T] = 0$ allora $[B^T, B] = 0$.*

[5] Infatti, come vedremo, consiste di due componenti connesse, una essendo $SO(n,\mathbb{R})$.

Proof. Si definisca la funzione $\Phi(B) = \mathbb{1} + B + D - e^B$. Il problema è equivalente a risolvere $\Phi(B) = B$. Ora se $\|B\| \leq 1/2$ si ha

$$\|\Phi(B)\| \leq \frac{1}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|B\|^k}{k!} = e^{\|B\|} - \|B\| - \frac{3}{4} \leq e^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{4} \leq \frac{1}{2}.$$

Dunque si ha $\Phi(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$. Inoltre, per ogni $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ si ha

$$\begin{aligned}\|\Phi(B_1) - \Phi(B_2)\| &\leq \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_1^k - B_2^k}{k!} \right\| \leq \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k-1} B_1^{k-j-1}(B_1 - B_2)B_2^j}{k!} \right\| \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k2^{-k+1}}{k!} \|B_1 - B_2\| \leq (e^{\frac{1}{2}} - 1)\|B_1 - B_2\| \leq 0.7\|B_1 - B_2\|.\end{aligned}$$

Quindi Φ è una contrazione. Dunque $B_n = \Phi^n(0)$ è una successione di Chauchy e il limite soddisfa

$$B = \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \Phi(B_{n-1}) = \Phi(B).$$

D'altra canto se abbiamo due soluzioni $\{X_i\}_{i=1}^2 \subset \mathcal{B}$, ovvero $\Phi(X_i) = X_i$, allora

$$\|X_1 - X_2\| = \|\Phi(X_2) - \Phi(X_i)\| \leq .7\|X_1 - X_2\|,$$

quindi $X_1 = X_2$, dunque la soluzione è unica.

Ora assumiamo che $[D, D^T] = 0$, e dimostriamo per induzione che $[B^T, B] = 0$. Supponiamo che $[D, B_n] = [D^T, B_n] = [B_n, B_n^T] = 0$ allora[6]

$$\begin{aligned}&[D, B_{n+1}] = [D, \Phi(B_n)] = [D, \mathbb{1} + B_n + D - e^{B_n}] = -[D, e^{B_n}] = 0 \\ &[B_{n+1}^T, B_{n+1}] = [\mathbb{1} + B_n^T + D^T - e^{B_n^T}, \mathbb{1} + B_n + D - e^{B_n}] = 0\end{aligned}$$

le altre relazioni si dimostrano analogamente. Poichè $B_0 = 0$, che commuta con tutto, il Lemma segue per induzione. □

Possiamo ora applicare il Lemma 3.2 all'equazione (3.1). Per ogni $A \in O(n, \mathbb{R})$ tale che $\|A - \bar{A}\| \leq \frac{1}{4\|\bar{A}^{-1}\|}$ possiamo definire $D = \bar{A}^{-1}A - \mathbb{1}$. Poichè

$$\|D\| = \|\bar{A}^{-1}(A - \bar{A})\| \leq \frac{1}{4}$$

possiamo scrivere $A = \bar{A}e^B$. Per di più, poichè $\bar{A}, A \in O(n, \mathbb{R})$ si ha $\bar{A}^{-1} = \bar{A}^T$ e $A^{-1} = A^T$, dunque

$$[D^T, D] = [A^{-1}\bar{A}, \bar{A}^{-1}A] = A^{-1}\bar{A}\bar{A}^{-1}A - \bar{A}^{-1}AA^{-1}\bar{A} = 0.$$

Dunque Lemma 3.2 implica che $[B^T, B] = 0$, da cui segue[7]

$$\mathbb{1} = e^{B^T}\bar{A}^T\bar{A}e^B = e^{B^T}e^B = e^{B^T+B}.$$

Dall'unicià del Lemma 3.2 segue $B^T = -B$, ovvero $B \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$. D'altro canto $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ è naturalmente identificato con $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, il numero di entrate indipendenti in una matrice antisimmentrica n per n. Questo significa per ogni $A \in O(n, \mathbb{R})$ esiste un intorno U_A e una mappa $\phi_A : U_A \to \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ definita da $\phi_A^{-1}(B) = Ae^B$ tale che (U_A, ϕ_A) è una carta.

---

[6]Si noti che se $[A, C] = 0$ allora $[A^2, C] = A^2C - CA^2 = A[A, C] + [A, C]A = 0$. Quindi $[A^n, C] = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi $[e^A, C] = 0$.

[7]Si ricordi che se A e B commutano, allora $e^Ae^B = e^{A+B}$.

Problema 8. *Si mostri che se* (U_{A_1}, ϕ_{A_1}) *e* (U_{A_2}, ϕ_{A_2}) *sono due carte tali che* $U_{A_1} \cap U_{A_2} \neq \emptyset$, *allora, dove è definito,* $\phi_{A_1} \circ \phi_{A_2}^{-1} \in \mathcal{C}^\infty$.

Questo significa che $\{(U_A, \phi_A)\}_{A \in O(n,\mathbb{R})}$ forma un atlante. Sfortunatamente non è finito. Tuttavia $\{U_A\}_{A \in O(n,\mathbb{R})}$ è un ricoprimento aperto di $O(n,\mathbb{R})$. Ma essendo $O(n,\mathbb{R})$ compatto si può estrarre un sottoricoprimento finito $\{U_{A_i}\}_{i=1}^N$. Ne segue che $\{(U_A, \phi_A)\}_{i=1}^N$ è un atlante e quindi $O(n,\mathbb{R})$ è un manifold $\frac{n(n-1)}{2}$ dimensionale.

Ora capiamo la struttura locale di $O(n,\mathbb{R})$, cosa possiamo dire di quella globale? Siccome $\det : O(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua che ha valori solo ± 1, ne segue che deve avere almeno due componenti disconnesse. D'altro canto definire $G : O(n,\mathbb{R}) \to O(n,\mathbb{R})$ come $G(B) = -B$. Chiaramente $\det(G(B)) = -\det(B)$ inoltre è facile verificare che G è biettiva. Ne segue che $O(n,\mathbb{R}) = SO(n,\mathbb{R}) \cup G(SO(n,\mathbb{R}))$.

Lemma 3.3. $SO(n,\mathbb{R})$ *è connesso.*

Proof. Prima di tutto occorre capire meglio la struttura degli elementi di $SO(n,\mathbb{R})$, ovvero il loro spettro. A questo scopo, come è conveniente fare nella teoria spettrale, consideriamo l'azione degli elementi di $SO(n,\mathbb{R})$ su $\mathbb{C}^n$ invece che $\mathbb{R}^n$. Sia $A \in SO(n,\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ un suo autovalore e v un autovettore corrispondente di norma uno, allora[8]

$$|\lambda|^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle v, A^T A v \rangle = \langle v, v \rangle = 1.$$

Dunque deve essere $\lambda = e^{i\theta}$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$. Sia V l'autospazio associato a $e^{i\theta}$ e v un autovettore, allora se $w \perp v$ si ha

$$\langle Aw, v \rangle = e^{-i\theta} \langle Aw, Av \rangle = e^{-i\theta} \langle w, v \rangle = 0.$$

Perciò $V_1 = \{w \in V \; : \; \langle w, v \rangle = 0\}$ è uno spazio invariante per A, quindi deve contenere un autovettore. Ne segue che la molteciplicità algebrica e geometrica devono coincidere e gli autovettori sono ortogonali tra di loro. Se l'autovalore è complesso allora esiste un autospazio bidimensionale invariante e possiamo costruire una matrice antisimmetrica che agisce non trivialmente solo su tale spazio. Ne segue che esiste $b \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ tale che Ae^b è l'identià su tale spazio ed agisce come A nel perpendicolare. Si noti che A e Ae^b sono connessi dalla curva Ae^{tb}, $t \in [0,1]$. In questo modo è facile vedere che esiste una curva che connette A con una matrice C che ha autovalori 1 su tutti gli autospazi su cui A ha un autovalore complesso. Ne segue che C può avere solo un numero pari di autovalori -1. Dati due tali autovalori sia V lo spazio generato dagli autovettori. Si veda che esiste una matrice $c \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ tale che Ce^c è l'identità quando ristretta a V. In conclusione abbiamo una curva che unisce A ad $\mathbb{1}$ e quindi $SO(n,\mathbb{R})$ è connesso. □

Problema 9. *Si mostri che* $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ *è un'algebra dove il prodotto è dato dal commutatore* $[A,B] = AB - BA$. *Si chiama Algebra di Lie.*

Si noti che se $a \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore, con corrispondente autovettore v, allora

$$\lambda \|v\|^2 = \langle av, v \rangle = \langle v, a^T v \rangle = -\langle v, av \rangle = -\lambda \|v\|^2$$

dunque $\lambda = 0$. Mentre se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{C}^n$ è il corrispondente autovettore, allora $av = \lambda v$ implica $a\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$, dunque anche $\overline{\lambda}$ è un autovettore. D'altro canto

$$\overline{\lambda} \|v\|^2 = \langle av, v \rangle = \langle v, a^T v \rangle = -\langle v, av \rangle = -\lambda \|v\|^2$$

[8] Si ricordi che il prodotto scalare in $\mathbb{C}^n$ è definito come $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{v}_i w_i$.

ovvero $\lambda = i\theta$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$. Inoltre, se V è uno spazio invariante per $a \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ allora, se w è perpendicolare a V si ha, per ogni $v \in V$

$$0 = \langle w, av \rangle = -\langle aw, v \rangle$$

Ovvero anche $V^\perp$ è uno spazio invariante. Questo significa che esistono n autovettori e che sono ortogonali.

Bene questa è una bella teoria che ci poterebbe a parlare di algebre e gruppi di Lie ma veramente ci siamo lasciati distrarre: noi siamo interessati a $n = 3$. !

4. L'algebra $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ e il gruppo $SO(3, \mathbb{R})$

Nel caso $n = 3$ la dimensione di $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ è 3. Questa è una curiosa coincidenza che permette di identificare $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^3$ in una maniera che facilita molti conti. Vediamo come. Se $a \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ non ha autovalori complessi, allora tutti gli autovalori sono nulli e quindi $a = 0$. Dunque devono esistere autovalori complessi, che però vengono in coppie. Ne segue che gli autovalori di $a \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$, $a \neq 0$ devono essere $\{0, i\theta, -i\theta\}$. Per ogni $\omega \in \mathbb{R}^3$, scriviamo

$$a(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora $a(\omega)\omega = 0$.

Problema 10. *Si verifichi che $\omega \to a(\omega)$ è un isomorfismo tra $\mathbb{R}^3$ e $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$.*

Problema 11. *Si verifichi che $e^{a(\omega)}$ corrisponde ad una rotazione di un angolo $\|\omega\|$ attorno all'asse ω.*

I fisici amano quello che chiamano il *prodotto vettoriale* che è definito come

$$v \times w = (v_2 w_3 - v_3 w_2, w_1 v_3 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

la cui definizione si può ricordare con la formula mnemonica

$$v \times w = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

Problema 12. *Si verifichi che, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$, $a(\omega)v = \omega \times v = -a(v)\omega$.*

Problema 13. *Si verifichi che $[a(\omega_1), a(\omega_1)] = a(\omega_1 \times \omega_2)$.*

Problema 14. *Si verifichi che $a(v)w$ è perpendicolare a v e w.*

Ne segue che, dati $v, w \in \mathbb{R}^3$ se n è un vettore unitario perpendicolare a v, w, allora

$$\|a(v)w\| = |\langle n, a(v)w \rangle| = \left| \det \begin{pmatrix} n \\ v \\ w \end{pmatrix} \right|$$

Dunque $\|a(v)w\|$ è uguale al volume del parallelepipedo determinato da v, w, n, che è uguale all'area del parallelogramma determinato dai vettori v, w. Quindi, detto α l'angolo tra v e w si ha

$$\|a(v)w\| = \|v\| \|w\| | \sin \alpha|.$$

Ne segue che

$$\|a(v)\| = \|v\|.$$

La conclusione di questo argomento è che dato un elemento $a \in \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ e un vettore v tale che $av = 0$ e $\|a\| = \|v\|$ allora $a \in \{a(\pm v)\}$.

Sia ora $U \in O(3,n)$ e si consideri il cambio di coordinate indotto a U. Allora

$$Ua(v)w = Ua(v)U^T Uw$$

significa che nelle nuove coordinate l'azione di $a(v)$ è sostituita dall'azione di $Ua(v)U^T$. Ma $[Ua(v)U^T]Uv = Ua(v)v = 0$ mentre

$$\|Ua(v)U^T\| = \sum_{\|w\|=1} \|Ua(v)U^T w\| = \sum_{\|U^T w\|=1} \|a(v)U^T w\| = \|a(v)\| = \|v\|.$$

Dunque $Ua(v)U^T \in \{a(\pm Uv)\}$. Per decidere il segno supponiamo che v, w, n sia una base ortogonale tale che $\langle n, a(v)w\rangle > 0$. Allora se $Ua(v)U^T = a(\sigma Uv)$, con $\sigma \in \{-1, 1\}$,

$$\langle n, a(v)w\rangle = \langle Un, Ua(v)U^T Uw\rangle = \langle Un, a(\sigma Uv)Uw\rangle.$$

Questo significa che l'orientamento della base $\{v, w, n\}$ deve essere lo stesso di quello della base $\{Uv, Uw, \sigma Un\}$ ovvero $\sigma = \det U$.

Remark 4.1. *Questo è quello che intendono i fisici quando dicono che il vettore v è* assiale*: non è affatto un vettore, è una matrice antisimmetrica e sotto riflessione non cambia segno. Infatti abbiamo appena visto che si trasforma come $Ua(v)U^T = a([\det U]Uv)$ che coincide col modo in cui si trasformano i vettori solo se $U \in SO(3,\mathbb{R})$.*

Risulta conveniente considerare la mappa $E : \mathbb{R} \times S^2 \to SO(3,\mathbb{R})$, $S^2 = \{\omega \in \mathbb{R}^3\ ;\ \|\omega\| = 1\}$, definita da

$$E((\theta\hat{\omega})) = e^{a(\theta\hat{\omega})}.$$

Definiamo inoltre la relazione di equivalenza[9] $(\theta, \hat{\omega}) \sim (\theta', \hat{\omega}')$ se $\theta\hat{\omega} = (\theta' + 2k\pi)\hat{\omega}'$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$ e definiamo $\Omega = \mathbb{R} \times S^2/\sim$. Il nostro scopo è mostrare che E si può quozientare su Ω.

Per cominciare capiamo un poco meglio come sono fatte le classi di equivalenza: $a \in \Omega$ e $x = (\theta, \hat{\omega}) \in a$ allora $\{(\theta + 2\pi k, \hat{\omega})\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset a$. Se $\theta = 2\pi k$ allora $(0, \hat{\omega}) \in a$ e quindi $(0, \hat{\omega}') \in a$ per ogni $\hat{\omega}' \in S^2$ dunque $a = \{(2\pi k, \hat{\omega})\}_{k\in\mathbb{Z},\hat{\omega}\in S^2}$. Se invece $\theta \notin \{(2\pi k, \hat{\omega})\}_{k\in\mathbb{Z}}$ allora deve essere $a = \{(\sigma\theta + 2\pi k, \sigma\hat{\omega})\}_{k\in\mathbb{Z},\sigma^2=1}$

Lemma 4.2. *La mappa E induce una mappa $\mathcal{E} : \Omega \to SO(3,\mathbb{R})$. Inoltre $\mathcal{E}$ è biunivoca.*

Proof. Sia $A \in SO(3,\mathbb{R})$. Sappiamo che esiste $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^3$, $\|\hat{\omega}\| = 1$, tale che $A\hat{\omega} = \hat{\omega}$, inoltre avrà due autovalori $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$. Allora sia $U \in SO(3,\mathbb{R})$ tale che $U\hat{\omega} = e_3$. Allora $UAU^T e_3 = UA\hat{\omega} = U\hat{\omega} = e_3$ e ha anche lei due autovalori $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$. D'altro canto

$$e^{a(\theta e_3)} = \mathrm{Exp}\begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: R(\theta) \tag{4.1}$$

Problema 15. *Si verifichi che i soli elementi di $SO(3,\mathbb{R})$ che lasciano invariato e_3 e hanno autovalori $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$, sono $R(\theta + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.*

[9] Si verifichi che si tratta proprio di una relazione di equivalenza.

Dunque $UAU^T \in \{e^{a(\theta e_3)}, e^{a((\theta+\pi)e_3)}\}$ e

$$A = U^T e^{a(\theta e_3)} U = e^{U^T a(\theta e_3) U} = e^{a(\theta U^T e_3)} = e^{a(\theta \hat{\omega})}$$

oppure $A = e^{a((\theta+\pi)\hat{\omega})}$. Dunque A appartiene all'immagine di E che quindi è suriettiva.

D'altro canto, abbiamo visto che $E(\theta\hat{\omega})$ ha autovalori $1, e^{\pm\theta}$, dunque se $E(\theta\hat{\omega}) = E(\theta'\hat{\omega}')$ allora deve essere $\{e^{\pm\theta}\} = \{e^{\pm\theta'}\}$. Se $\theta \in \{2\pi k\}_{k\in\mathbb{Z}} =: 2\pi\mathbb{Z}$, allora $\theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$ e $E(\theta\hat{\omega}) = \mathbb{1} = E(\theta'\hat{\omega}')$ se e solo $(\theta', \hat{\omega}') \in [(0, \hat{\omega})]$.[10] Se $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ allora, cambiando variabili come sopra, si ha che deve essere $E(\theta e_3) = E(\theta' U\hat{\omega}')$, dunque $U\hat{\omega}' = \sigma e_3$, $\sigma^2 = 1$. Ne segue che $E(\theta\hat{\omega}) = E(\theta'\hat{\omega}')$ se e solo se $\theta'\sigma e_3 = (\theta + 2k\pi)e_3$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ovvero, ricambiando variabili, $(\theta, \hat{\omega}) \sim (\theta', \hat{\omega}')$. In conclusione, le classi di equivalenza coincidono con le preimagini di $E(A)$ per $A \in SO(3, \mathbb{R})$, e quindi E induce naturalmente la mappa $\mathcal{E}(a) = E(x)$ per $x \in a$ e tale mappa è biunivoca. □

Il lemma precedente ci dice che in un qualche senso Ω e $SO(3, \mathbb{R})$ sono uguali. Tuttavia una applicazione biunivoca può essere veramente orribile. Noi vorremmo una corrispondenza che preserva cose naturali come, ad esempio, la vicinanza. Ovvero vorremmo, come minimo, un omeomorfismo. Dobbiamo quindi discutere un attimo di topologia.

Lemma 4.3. *Ω è uno spazio metrico completo.*[11]

Proof. Poichè $\mathbb{R} \times S^2 \subset \mathbb{R}^4$ è naturalmente uno spazio metrico completo con la metrica di $\mathbb{R}^4$, chiamiamola d. Per ogni $a, b \in \Omega$ definiamo

$$\tilde{d}(a, b) = \inf_{x\in a, y\in b} d(x, y).$$

Verifichiamo che $\tilde{d}$ è una metrica.[12]

Se $d(a, b) = 0$ allora esistono successioni $\{x_n\} \subset a$ e $\{y_n\} \subset b$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Visto che, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $d(x + (2\pi k, 0), y + (2\pi k, 0)) = d(x, y)$, possiamo assumere che $x_n = (\theta_n, \hat{\omega}_n)$ con $\theta_n \in [-\pi, \pi]$. Ne segue che esistono $\theta, \hat{\omega}$ tali che $x_n \in \{(\theta, \hat{\omega}), (-\theta, -\hat{\omega})\}$ per n abbastanza grande. Possiamo quindi prendere una sottosuccesione in cui $x_{n_j} = x_*$, costante. Ne segue che, per j grande abbastanza, $y_n = x_*$ e quindi $x_* \in a \cap b$, che implica $a = b$.

La proprietà $\tilde{d}(a, b) = \tilde{d}(b, a)$ è ovvia. Rimane da verificare la disuguaglianza triangolare: se $(\theta, \hat{\omega}) \in a$

$$\begin{aligned}\inf_{(\theta',\hat{\omega}')\in b} d((\theta, \hat{\omega}), (\theta', \hat{\omega}')) &= \inf_{(\theta',\hat{\omega}')\in b} d((-\theta, -\hat{\omega}), (\theta', \hat{\omega}')) \\ &= \inf_{(\theta',\hat{\omega}')\in b} d((\theta + 2\pi k, \hat{\omega}), (\theta' + 2\pi k, \hat{\omega}')).\end{aligned}$$

[10] Uso $[x]$ per indicare la casse di equivalenza cui appartiene x.

[11] Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme e d una distanza. Ovviamente questo implica che si tratta di uno spazio topologico: gli aperti sono generati dagli insiemi $\{x \in X : d(x, \bar{x}) < \varepsilon\}$, $\bar{x} \in X$ e $\varepsilon > 0$. Ne segue che dati due spazi topologici (X, d_X) e (Y, d_Y) e una funzione $f : X \to Y$, f è continua se e solo se, per ogni x, $\lim_{z\to x} f(z) = f(x)$, ovvero $\lim_{d_X(z,x)\to 0} d_Y(f(z), f(x)) = 0$. Completo significa che ogni successione di Cauchy ha limite.

[12] Il fatto che sia una pseudometrica è completamente generale (sebbene con una definizione della distanza un poco più generale), il fatto che $d(a, b) = 0$ implichi $a = b$ dipende invece da qualche proprietà specifica della relazione di equivalenza.

Quindi

$$\tilde{d}(a,b) = \inf_{y \in b} d((\theta, \hat{\omega}), y)$$

per ogni $(\theta, \hat{\omega}) \in a$. Siano $a, b, c \in \Omega$ allora per ogni $x \in a$ e $y \in b$

$$\tilde{d}(a,c) = \inf_{z \in c} d(x,z) \leq \inf_{z \in c} d(x,y) + d(y,z) = d(x,y) + \tilde{d}(b,c),$$

che da la disuguaglianza triangolare prendendo l'inf su x, y. □

Problema 16. *Si mostri che Ω è compatto.*

Lemma 4.4. *La mappa $\mathcal{E} : \Omega \to SO(3, \mathbb{R})$ è un omeomorfismo.*

Proof. Si noti che la mappa $\widetilde{E} : \mathbb{R}^3 \to SO(3, \mathbb{R})$ definita da $\widetilde{E}(v) = e^{a(v)}$ è continua (in fatti differenziabile). Anche la mappa $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ definita da $g(\theta, \hat{\omega}) = \theta\hat{\omega}$ è continua, quindi $E = \widetilde{E} \circ g$ è anche continua, ne segue che $\mathcal{E}$ è continua. D'altro canto $\mathcal{E}$ è una mappa tra spazi compatti quindi l'immagine di un chiuso è chiuso, se ne evince che anche l'inversa è continua. □

Lo spazio Ω non è particolarmente familiare, vale quindi la pena di notare che è isomorfo ad uno spazio topologico più familiare ai matematici.[13]

Lemma 4.5. *Si mostri che $SO(3, \mathbb{R})$ è isomorfo allo spazio proiettivo P_3.*[14]

Proof. Definiamo la mappa $F : \mathbb{R} \times S^2 \to P_3$ come

$$F((\theta, \hat{\omega})) = [(\cos\theta/2, \hat{\omega}\sin\theta/2)]_p$$

dove $[z]_p$ è la classe di equivalenza di $z \in \mathbb{R}^4$. Si noti che

$$\begin{aligned} F((\theta + 2\pi, \hat{\omega})) &= [(\cos(\theta/2 + \pi), \hat{\omega}\sin(\theta/2 + \pi))]_p \\ &= [-(\cos(\theta/2), \hat{\omega}\sin(\theta/2))]_p = F((\theta, \hat{\omega})), \end{aligned}$$

Ne segue che $F((\theta + 2\pi k, \hat{\omega})) = F((\theta, \hat{\omega}))$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Se $F(\theta, \hat{\omega}) = [(1,0)]_p$ allora deve essere $\sin\theta/2 = 0$ ovvero $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. D'altro canto se $\theta \in 2\pi k$ allora $F(\theta, \hat{\omega}) = (\cos k\pi, 0) = ((-1)^k, 0) \in [(1,0)]_p$, ovvero $F^{-1}([(1,0)]_p) = [(0, \hat{\omega})]$. Se invece $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, ne se segue che $F((\theta', \hat{\omega}')) = [(\theta, \hat{\omega})]_p$ se e solo se $(\cot\theta'/2, \hat{\omega}') = \lambda(\cot\theta/2, \hat{\omega})$. Dunque $\lambda\hat{\omega} = \hat{\omega}'$, quindi $\lambda \in \{\pm 1\}$. Visto che ci possiamo restringere al caso $\theta, \theta' \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ e che su questo dominio cot è invertibile, questo mostra che se $\lambda = 1$ allora $\theta' = \theta$ e se $\lambda = -1$ allora $\theta' = -\theta$, ma in tal caso $\theta'\hat{\omega}' = \theta\hat{\omega}$ e dunque in ogni caso $(\theta', \hat{\omega}') \sim (\theta, \hat{\omega})$. Questo mostra che F è costante sulle classi di equivalenza di Ω e induce una biezione $\widetilde{F} : \Omega \to P_3$. Poichè F è continua anche $\widetilde{F}$ lo è. Ne segue che $\widetilde{F}$ è un omeomorfismo. Ma allora $F \circ \mathcal{E}^{-1}$ è l'omeomorfismo cercato. □

Problema 17. *Se vi volete divertire mostrate che infatti $F \circ \mathcal{E}^{-1}$ è un diffeomorfismo, ovvero $SO(3, \mathbb{R})$ e P_3 sono diffeomorfi.*

Dopo questi esercizi siamo pronti a tornare allo studio del moto di punti vincolati e a considerare il caso generale di N punti vincolati.

[13] Due spazi si dicono isomorfi se esiste un omeomorfismo tra di loro.

[14] Si ricordi che P_n è definito come $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ dove $x \sim y$ se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $y = \lambda x$.

5. Corpi rigidi in $\mathbb{R}^3$

La discussione precedente implica che dati 4 punti il segno di γ non può cambiare durante il moto. Quindi, data una configurazione iniziale dei quattro punti tutte le configurazioni che possono essere raggiunte con un moto rigido sono descritte da $x_1 \in \mathbb{R}^2$ e $A \in SO(3, \mathbb{R})$.[15] Si considerino ora $N \in \mathbb{N}$ punti, $N \geq 4$, in $\mathbb{R}^3$ che soddisfano i vincoli

$$\|x_i - x_j\| = r_{i,j} > 0 \tag{5.1}$$

per ogni $i > j \in \{1, \dots, N\}$. Se tutti i punti appartengono ad un piano P allora spostando la coordinata x_k di una quantità $h \in \mathbb{R}^3$ perpendicolare a P si ha

$$| \, \|x_k + h - x_j\| - \|x_k - x_j\| \, | \leq C\|h\|^2.$$

Ciò significa che si può deformare il corpo cambiando di pochissimo le distanze tra i punti. In altre parole il corpo non è molto rigido (si pensi ad una lamina o un filo). Assumiamo quindi che lo span di $x_j - x_1$ sia tutto $\mathbb{R}^3$. Dato qualunque insieme $\{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}$ dove $x_{i_2} - x_{i_1}$ e $x_{i_3} - x_{i_1}$ sono linearmente indipendenti l'analisi precedente ci dice che la loro posizione è determinata da x_{i_1} più una matrice $A \in SO(3, \mathbb{R})$ e la posizione di qualunque altro punto x_k che soddisfa i vincoli è univocamente determinata (a parte una riflessione globale rispetto al piano contenente i punti $\{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}$).

Ne segue che indipendentemente dal numero di punti un corpo rigido è caratterizzato da un insieme di vettori $\{v_i\}_{i=1}^n$, $v_1 = 0$, tali che $\|v_i - v_j\| = r_{i,j}$ e tutte le possibili posizioni dei suoi punti sono $x_i = x_1 + Av_i$ per qualche $x_1 \in \mathbb{R}^3$ e $A \in SO(3, \mathbb{R})$.

Se ora i punti hanno massa m_i, allora è conveniente scegliere il punto di riferimento come il centro di massa $z = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$. Quindi, i punti del corpo in una posizione generica sono descritti da $x_i = z + Av_i$, dove v_i sono le coordinate dei punti quando il centro di massa è nell'origine e il corpo è in una posizione di riferimento scelta a piacere (possibilmente in maniera conveniente). Si noti che deve essere $\sum_{i=1}^N m_i v_i = 0$. Ne segue che, dette $x_i(t) = z(t) + A(t)v_i$ le traiettorie dei punti,

$$\dot{x}_i(t) = \dot{z}(t) + A(t)a(\omega(t))v_i = \dot{z}(t) + A(t)\omega(t) \times v_i.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N m_i \|\dot{x}_i(t)\|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N m_i \left\{\|\dot{z}\|^2 + \langle \omega(t) \times v_i, \omega(t) \times v_i\rangle\right\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N m_i \|\dot{z}\|^2 + m_i \langle a(v_i)\omega(t), a(v_i)\omega(t)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N m_i \|\dot{z}\|^2 + \langle \omega(t), m_i[-a(v_i)^2]\omega(t)\rangle.
\end{aligned}$$

[15] Qui stiamo usando il fatto che $SO(3, \mathbb{R})$ è connesso e che $O(3, \mathbb{R})$ è l'unione di due "copie" di $SO(3, \mathbb{R})$.

Detta $M = \sum_{i=1}^N m_i$ la massa totale e $I = \sum_{i=1}^N m_i[-a(v_i)^2]$ il *momento di inerzia*, possiamo finalmente esprimere l'energia cinetica del corpo come

$$T = \frac{M}{2}\|\dot{z}\|^2 + \frac{1}{2}\langle \omega, I\omega\rangle.$$

Problema 18. *Si mostri che la matrice* $I = (I_{i,j})$ *che esprime il momento di inerzia ha la forma*

$$I_{i,j} = \sum_{k=1}^N m_k \left(\|v_k\|^2\delta_{ij} - (v_k)_i(v_k)_j\right).$$

L'ultimo problema che ci rimane è: quali sono le coordinate Lagrangiane?

Dalla discussione precedente è ovvio che non ci sono coordinate veramente globali e naturali sebbene si possano trovare coordinate che hanno singolarità solo su un piccolo insieme (come accade, per esempio, con le coordinate polari). Esistono varie scelte per tali coordinate la più popolare essendo i cosiddetti *angoli di Eulero*. Potete trovare i dettagli su qualunque libro.

Carlangelo Liverani, Dipartimento di Matematica, II Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy.

Email address: `liverani@mat.uniroma2.it`