MOTI QUASIPERIODICI

CARLANGELO LIVERANI

1. Piccole oscillazioni in più dimensioni

Abbiamo visto che, in una dimensione, il moto vicino ad un minimo locale non degenere è periodico e abbiamo anche visto come calcolare il periodo con precisione arbitraria. La prossima domanda naturale è: che accade in più dimensioni?

Consideriamo il caso più semplice possibile: un potenziale strettamente convesso $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ con minimo in zero.[1] Allora l'equazione di Newton ha la forma

$$M\ddot{x} = -\nabla V(x). \tag{1.1}$$

Il nostro obiettivo è di studiare quali sono i moti possibili.

Ovviamente l'energia è una funzione di Lyapunov e quindi il minimo è un punto di equilibrio stabile per (1.1). Senza perdita di generalità possiamo assumere che il minimo è in zero (basta traslare le coordiante). È quindi naturale restringere il nostro interesse ad un piccolo intorno di zero. In tal caso il campo vettoriale avrà la forma $-\nabla V(x) = -D^2V(0)x + \mathcal{O}(\|x\|^2)$. Dunque il primo passo è di capire che accade con potenziali quadratici. In tal caso le equazioni del moto si scrivono come

$$M\ddot{x} = -Ax, \tag{1.2}$$

dove M, A sono matrici strettamente positive.[2] Risulta conveniente fare il cambio di variabili $x = M^{-\frac{1}{2}}z$,[3] allora

$$M^{\frac{1}{2}}\ddot{z} = -AM^{-\frac{1}{2}}z$$

ovvero

$$\ddot{z} = -M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}}z.$$

Si noti che anche $M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}}$ è simmetrica e definita positiva.[4]

2. Oscillatori armonici

In questa sezione volgiamo quindi studiare il problema[5]

$$\ddot{x} = -Ax, \tag{2.1}$$

con A simmetrica e definita strettamente positiva. Poichè è simmetrica, è diagonalizzabile e gli autovalori sono strettamente positivi. Chiamiamoli $\{\omega_i^2\}_{i=1}^d$. Si può

Date: April 20, 2021.

[1] Ovvero $V(0) = 0$, $V(x) \geq 0$, e $D^2V(0)$ è una matrice strettamente definita positiva, ovvero esiste $a > 0$ tale che, per ogni $v \in \mathbb{R}^d$, $\langle v, D^2V(0)v\rangle \geq a\|v\|^2$.

[2] Nel nostro caso $A = D^2V(0)$ che è simmetrica per il Lemma di Schwartz e positiva poichè zero è un mininmo.

[3] Visto che la matrice M è diagonalizzabile, in quanto simmetrica, e che gli autovalori sono strettamente positivi, in quanto definita strettamente positiva, ne segue che $M^{-\frac{1}{2}}$ è ben definita.

[4] Infatti, per ogni $v \in \mathbb{R}^d$ abbiamo $\langle v, M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}}v\rangle = \langle (M^{-\frac{1}{2}}v), A(M^{-\frac{1}{2}}v)\rangle \geq 0$.

[5] Si noti che, per la discussione precedente, (1.2) può sempre essere messa in questa forma.

quindi definire una matrice Ω, anche essa simmetrica e definita positiva, tale che $\Omega^2 = A$. Ovviamente gi autovalori di Ω saranno $\{\omega_i\}_{i=1}^d$. Se riduciamo (2.1) ad un sitema del primo ordine nelle variabili $z = (z_1, z_2) = (x, \dot{x})$, abbiamo

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\Omega^2 & 0 \end{pmatrix} z =: Bz. \tag{2.2}$$

Abbiamo visto che la soluzione generale dell'equazione (2.2) è data da

$$z(t) = z_0 e^{Bt}.$$

Per rendere esplicita tale soluzione occorre calcolare gli autovalori della matrice B, ovvero risolvere

$$0 = \det(\lambda\mathbb{1} - B) = \det\begin{pmatrix} \lambda\mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \Omega^2 & \lambda\mathbb{1} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \lambda\mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \Omega^2 + \lambda^2\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \det\left(\lambda^2\mathbb{1} + \Omega^2\right)$$

Ovvero, gli autovalori di B sono $\{\pm\, i\omega_j\}_{j=1}^d$. Cerchiamo gli autovettori:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\Omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

che implica

$$\begin{aligned} \Omega^2 w_1 &= -\lambda^2 w_1 \\ w_2 &= \lambda w_1 \end{aligned}$$

Ne segue che gli autovettori hanno la forma $v_k^{\pm} = (w_k, \pm i\omega_k w_k)$ dove i $w_i \in \mathbb{C}^d$ sono gli autovettori di A.[6] Poichè A è una matrice simmetrica si ha che $\langle w_k, w_l\rangle = \delta_{kl}$. Ne segue che se $k \neq l$ allora[7]

$$\langle v_k^{\pm}, v_l^{\pm}\rangle = \langle w_k, w_l\rangle + \omega_k\omega_k\langle w_k, w_l\rangle = 0.$$

Esercizio 1. *Data la matrice* $\Lambda = \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$ *si definisca il prodotto scalate* $\langle v, w\rangle_* := \langle v, \Lambda w\rangle$. *Si mostri che* $\langle v_k^{\pm}, v_l^{\pm}\rangle_* = 0$ *se* $k \neq l$. *Inoltre,* $\langle v_k^{+}, v_k^{-}\rangle_* = 0$. *Ovvero, gli autovalori di* B *sono ortogonali rispetto al prodotto scalare* $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$.

Esercizio 2. *Si verifichi che le soluzioni di* (2.1) *si possono scrivere come*

$$x(t) = \sum_{i=1}^d w_i(a_i\cos\omega_i t + b_i\sin\omega_i t)$$

dove $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ *sono arbitrari.*

Si mostri che un modo alternativo di scrivere la soluzione generale è

$$x(t) = \sum_{i=1}^d w_i\alpha_i\cos(\omega_i t + \beta_i).$$

Come sono fatti tali moti nello spazio delle fasi? Siccome

$$(x(t), \dot{x}(t)) = \sum_{i=1}^d \left(w_i\alpha_i\cos(\omega_i t + \beta_i), -w_i\alpha_i\omega_i\sin(\omega_i t + \beta_i)\right)$$

---

[6] Come al solito, quando si fa teoria spettrale (ovvero si trovano radici di polinomi) è conveniente lavorare nei complessi. Ovviamente bisogna ricordarsi che il risultato finale deve essere espresso da numeri reali.

[7] Si noti che stiamo usando $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sia per il prodotto scalare in $\mathbb{C}^d$ che per quello in $\mathbb{C}^{2d}$. Si ricordi inoltre che per $v, w \in \mathbb{C}^n$ si ha $\langle v, w\rangle = \sum_{k=1}^n \bar{v}_k w_k$.

il moto risulta essere decomponibile in fattori. Si consideri il caso in cui tutti gli α_j sono zero meno α_i. Allora il moto avverrà nel piano $\mathbb{V}_i = \{(\alpha w_i, \beta w_i) \,:\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$. Per di più, in tale piano il moto è confinato ad una ellisse.[8]

Risulta perciò conveniente introdurre le nuove variabili $(\theta_i, I_i) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d_+$ e il cambio di variabili[9]

$$(z_1, z_2) = \sum_{i=1}^{d} I_i \left(w_i \cos\theta_i, -\omega_i w_i \sin\theta_i\right). \tag{2.3}$$

Esercizio 3. *Si verifichi che, se $I_i \neq 0$, il cambio di variabili è invertibile. Si verifichi che, nelle nuove variabili il modo è semplicemente*

$$I_i(t) = I_i(0)\,; \quad \theta_i(t) = \omega_i t + \beta_i.$$

Ovvero si verifichi che

$$(x(t), \dot{x}(t)) = \sum_{i=1}^{d} I_i(0)(w_i \cos\theta_i(t), -\omega_i w_i \sin\theta_i(t))$$

L'esercizio precedente implica che nelle variabili (I, θ) le equazioni del moto sono

$$\dot{I} = 0$$
$$\dot{\theta} = \omega$$

dove $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d)$.

In altre parole le I sono costanti del moto e, ad I fissata, il moto è diffeomorfo ad una traslazione rigida sul toro $\mathbb{T}^d$. Vale quindi la pena di investigare questo tipo di moto un poco più nel dettaglio.

3. Traslazioni rigide del toro

Nella sezione precedente il toro era periodico di periodo 2π. In questo capitolo, per convenienza di notazione, facciamo un banale cambio di coordinate e consideriamo tori di periodo uno, ovvero $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Se consideriamo su $\mathbb{R}^d$ l'equazione differenziale

$$\dot{\xi} = \bar{\omega}$$

dove $\bar{\omega} \in \mathbb{R}^d$ essa ha ovviamente soluzione $\xi(t) = \xi(0) + t\bar{\omega} =: \phi_t(\xi(0))$. Se vediamo $\mathbb{R}^d$ come un ricoprimento di $\mathbb{T}^d$, questo induce le traslazioni rigide sul toro che abbiamo visto apparire nel capitolo precedente e che vogliamo studiare in questa sezione.

Cominciamo dal caso in cui $\frac{\omega_i}{\omega_j} \in \mathbb{Q}$ per tutti gli i, j. Si verifichi che questo implica che esistono $\omega \in \mathbb{R}$ e $p_i \in \mathbb{Z}$ tali che $(\omega_1, \dots, \omega_d) = \omega \cdot (p_1, \dots, p_d)$. Questo significa che, ponendo $T = \omega^{-1}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $\theta(t + T) = \theta(t)$, ovvero tutti i moti sono periodici di periodi T. Ne segue che tali moti avvengono in una curva chiusa, ovvero sono diffeomorfi ad un cerchio.

Consideriamo l'altro estremo: $\frac{\omega_i}{\omega_j} \notin \mathbb{Q}$ per tutti gli i, j. Per semplicità discutiamo prima il caso $d = 2$.

Esercizio 4. *Mostrare che il sistema non ammette orbite periodiche*

[8] Lo si dimostri.

[9] In questo caso $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d$, ovvero il toro ha dimensione 2π.

Per capire meglio il moto introduciamo la nozione di *sezione di Poincarè*. Si consideri $S = \{(0, y) \; : y \in \mathbb{R}\}$, allora il moto partendo da S è $(\omega_1 t, \omega_2 t + y)$. Se lo guardiamo al tempo $t = \omega_1^{-1}$ allora la prima coordinata e' uguale ad 1 che è come dire 0, per la periodicità del toro. Dunque siamo nuovamente in S, ma in quale punto? Ovviamente nel punto

$$f(y) = y + \alpha \mod 1,$$

dove $\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{Q}$. In altre parole abbiamo ottenuto una mappa $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ che è una rotazione irrazionale.

Esercizio 5. *Si mostri che, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha*

$$\phi_{n/\omega_1}(0, y) = (0, f^n(y)).$$

Lemma 3.1. *Le orbite di f sono dense in $\mathbb{T}$.*

Proof. Per ogni $y \in \mathbb{T}$, si consideri $\{f^n(y)\}$, questa è una successione in un compatto, quindi ammette una sottosuccessione convergente $\{f^{n_j}(y)\}$. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste j_0 tale che $|f^{n_{j_0}}(y) - f^{n_{j_0+1}}(y)| \le \varepsilon$. Chiamando $m = n_{j_0+1} - n_{j_0}$, segue che, per ogni $z \in \mathbb{T}$, $|f^m(z) - z| \le \varepsilon$. Dunque $\{f^{km}(y)\}$ procede a passi più piccoli di ε e quindi si avvicinerà a qualunque punto più di ε. Visto che ε è arbitrario, ne segue che $\{f^n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è densa in $\mathbb{T}$. □

Esercizio 6. *Si dimostri che il Lemma 3.1 implica che, per ogni $\alpha \notin \mathbb{Q}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $p, q \in \mathbb{N}$ tali che*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \le \varepsilon q^{-1}.$$

Esercizio 7. *Si estendano gli argomenti di cui sopra al caso $d > 2$. Ovvero si dimostri che se tutte le frequenze sono irrazionali tra di loro, allora il moto è denso su $\mathbb{T}^d$. (Suggerimento: si proceda per induzione. Assumendolo vero per d si consideri il caso $d+1$. Allora dato un qualunque $\bar{y} \in \mathbb{T}^d$ si consideri l'insieme $S = \{(\bar{y}, y)\}_{y \in \mathbb{T}}$. Per induzione, per ogni $\varepsilon > 0$ e $z \in \mathbb{T}^d$ a distanza da S minore di ε esiste un $m(z)$ tale che la distanza di $f^m(0, \ldots, 0, z)$ da S è minore di ε. Si noti che $\sup m(z) - \inf m(z) \le 2$. Si consideri allora la traiettoria $z_{j+1} = f^{m(z_j)}(z_j)$ e si argomenti che tale traiettoria arriverà in un intorno ε di qualunque punto di S.)*

4. Conclusione

Tornando al moto attorno al nostro punto di equilibrio, ne concludiamo che dipende dalle frequenze (ω_i), se sono razionalmente dipendenti, allora il moto si svolge su tori di dimensione più bassa, se non sono razionalmente dipendenti, allora il moto riempie densamente un toro di dimensione d. Tale moto è detto *quasiperiodico*.

La prossima domanda sarebbe: che succede nel caso non lineare? Sfortunatamente la risposta a tale domanda è assai complessa ed esula dagli scopi di questo corso. In effetti alcuni aspetti di questa domanda sono correntemente al centro della ricerca matematica.

References

Carlangelo Liverani, Dipartimento di Matematica, II Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy.

Email address: liverani@mat.uniroma2.it