Fisica Matematica I

Secondo Esonero, Venerdì 28-05-21

Cognome......................... Nome.........................

Avete 2:00 ore di tempo. Il primo esercizio vale 20 punti, il secondo 10. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si considerino 4 punti materiali $\{p_i\}_{i=0}^3$ di massa m, in un piano verticale, soggetti ai seguenti vincoli: p_0 si muove su di una retta orizzontale passante per l'origine; $\|p_1 - p_2\| = \|p_1 - p_3\| = \ell$, $\|p_2 - p_3\| = \sqrt{3}\ell$; $\|p_0 - p_1\| = h$, $\|p_0 - p_2\| = \|p_0 - p_3\| < \ell$. In aggiunta, p_0 è connesso con l'origine da una molla di costante K.

   (a) Si determini il numero di gradi di libertà del sistema e si scelgano delle coordinate lagrangiane.

   (b) Si scriva la lagrangiana nelle coordinate scelte

   (c) Si discutano i punti di equilibrio e la loro stabilità al variare di $h \in (0, \ell/2)$.

   (d) Si dica se, per $h = \ell/3$, il sistema ha dei moti periodici.

2. Data la superficie $z = x^2 + y^2$ si determini la curva più breve, su tale superficie, tra i punti $(0, 0, 0)$ e $(1, 0, 1)$.

Soluzione

1. Il punto p_0 ha un grado di libertà. Poichè la distanza p_1, p_0 è fissata la posizione di p_1 è determinata da un anglo (per esempio l'angolo con l'orizzontale). Si noti inoltre che l'altezza del triangolo p_1, p_2, p_3 è (per Pitagora) $\ell/2$ mentre $\|p_2 - p_1\| = \sqrt{3}\ell$.

   Dati p_1 e p_0 gli altri punti sono determinati dai vincoli. Infatti, se consideriamo la perpendicolare al punto medio di p_2, p_3 questa deve essere contenere l'altezza sia del triangolo p_0, p_2, p_3 che del triangolo p_1, p_2, p_3 visto che sono entrambi isosceli. Ne segue che il triangolo p_1, p_2, p_3 può avere solo due configurazioni simmetriche rispetto a p_1. Se $h \leqslant \ell/2$ allora, una configurazione contiene p_0 al suo interno e l'altra no. Ma poichè $\|p_0 - p_3\| < \|p_1 - p_3\|$ ne segue che p_0 deve essere all'interno del triangolo p_1, p_2, p_3 che è quindi univocamente determinato. Se invece $h > \ell/2$ allora p_0 è all'esterno di entrambe le configurazioni ma, chiamando p_4 il punto medio di p_2, p_3, in un caso

   $$\|p_0 - p_2\|^2 = \|p_4 - p_0\|^2 + \|p_2 - p_4\|^2 = (h - \ell/2)^2 + (\sqrt{3}\ell/2)^2 = \ell^2 + h[h - \ell] < \ell^2$$

   Nell'altro caso

   $$\|p_0 - p_2\|^2 = \|p_4 - p_0\|^2 + \|p_2 - p_4\|^2 = (h + \ell/2)^2 + (\sqrt{3}\ell/2)^2 = \ell^2 + h[h - \ell] \geqslant \ell^2$$

   quindi, nuovamente, la configurazione è univocamente determinata.

   Quindi il sistema ha due gradi di libertà.
   Sia x la posizione di p_0 sulla retta orizzontale e θ l'angolo tra il segmento p_0, p_1 e la retta orizzontale. Dunque, in coordinate

   $$\begin{aligned} &p_0 = (x, 0) \quad\quad p_1 = (x, 0) + h(\cos\theta, \sin\theta) =: xe_1 + hv(\theta) \\ &p_2 = xe_1 + (h - \ell/2)v(\theta) - n(\theta)\frac{\sqrt{3}}{2}\ell; \quad p_2 = xe_1 + (h - \ell/2)v(\theta) + n(\theta)\frac{\sqrt{3}}{2}\ell; \end{aligned}$$

   dove $n(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Possiamo quindi calcolare la Lagrangiana

   $$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \theta) =& \frac{m}{2}\Bigg\{4\dot{x}^2 + 2h\cos\theta\dot{x}\dot{\theta} + 2\Big[\Big(h - \frac{\ell}{2}\Big)\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\sin\theta\Big]\dot{x}\dot{\theta} \\ &+ 2\Big[\Big(h - \frac{\ell}{2}\Big)\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\sin\theta\Big]\dot{x}\dot{\theta} + \Big[h^2 + 2\Big(h - \frac{\ell}{2}\Big)^2 + \frac{3}{2}\ell^2\Big]\dot{\theta}^2\Bigg\} \\ &- \frac{K}{2}x^2 - mg\left[h\sin\theta + 2\Big(h - \frac{\ell}{2}\Big)\sin\theta\right] \\ =& \frac{m}{2}\Bigg\{4\dot{x}^2 + (6h - 2\ell)\cos\theta\dot{x}\dot{\theta} + (3h^2 - 2h\ell + 2\ell^2)\dot{\theta}^2\Bigg\} \\ &- \frac{K}{2}x^2 - mg(3h - \ell)\sin\theta. \end{aligned}$$

   Sappiamo che i punti di equilibrio corrispondono ai punti stazionari del potenziale, dunque sono $x = 0$ e $\theta \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ se $h \neq \ell/3$, mentre se $h = \ell/3$ tutti i punti $x = 0$ sono di equlibrio.

   Per quanto riguarda la stabilià occorre vedere la derivata seconda del potenziale:

   $$D^2V = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -mg(3h - \ell)\sin\theta \end{pmatrix}.$$

   Dunque, se $h < \ell/3$ allora $(0, \frac{\pi}{2})$ è un minimo del potenziale e quindi stabile, mentre l'altro punto è instabile. Se se $h > \ell/3$ accade il contrario, mentre se $h = \ell/3$, allora i punti di equilibrio non sono stabili in quanto una piccola velocità angolare da luogo ad una rotazione.

Finalmente, per $h = \ell/3$ la Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left\{4\dot{x}^2 + \frac{5}{3}\ell^2\dot{\theta}^2\right\} - \frac{K}{2}x^2.$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{aligned} 4m\ddot{x} &= -Kx \\ \ddot{\theta} &= 0. \end{aligned}$$

Dunque la x ha sempre un moto periodico di periodo $\sqrt{\frac{m}{\pi K}}$. Ne segue che se $\dot{\theta}(0) = 2\pi\frac{p}{q}\sqrt{\frac{\pi K}{m}}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, allora il sistema ha moti periodici di periodo $q\sqrt{\frac{m}{\pi K}}$. Visto che

$$\begin{aligned} x\left(q\sqrt{\frac{m}{\pi K}}\right) &= x(0) \\ \theta\left(q\sqrt{\frac{m}{\pi K}}\right) &= \theta(0) + q\sqrt{\frac{m}{\pi K}}2\pi\frac{p}{q}\sqrt{\frac{\pi K}{m}} \mod 2\pi = \theta(0). \end{aligned}$$

2. Sappiamo che il moto con Lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\|\dot{\xi}\|^2$, vincolato sulla superficie, avviene lungo le geodetiche. Basta quindi considerare le equazioni di Eulero-Lagrange associate. Le coordinate della superficie sono $\xi = (x, y, x^2 + y^2)$. Tuttavia, data la simmetria della superficie, è chiaramente meglio utilizzare le coordinate cilindriche $\xi = (x, y, z) = (\rho v(\theta), z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$. In tali coordinate il vincolo diviene $z = \rho^2$ e

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(1 + 4\rho^2)\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right]$$

Dunque

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[(1 + 4\rho^2)\dot{\rho}\right] - 4\rho\dot{\rho}^2 - \rho\dot{\theta} = 0 \\ &\frac{d}{dt}\left[\rho^2\dot{\theta}\right] = 0 \end{aligned}$$

Abbiamo dunque che la quantità (momento angolare) $\ell = \rho^2\dot{\theta}$ è conservata. Possiamo quindi scrivere

$$(1 + 4\rho^2)\ddot{\rho} + 4\rho\dot{\rho}^2 - \rho^{-1}\ell = 0.$$

Si noti che se $\theta = 0$ allora $(1, 0, 1) = (v(0), 1)$ dunque si può andare da 0 a $(1, 0, 1)$ mantendo $\theta = 0$ e cambiando solo ρ. Rimane da vedere se si può fare soddisfacendo le equazioni di Eulero-Lagrange. La seconda è soddisfatta poichè $\ell = 0$, la prima diviene

$$(1 + 4\rho^2)\ddot{\rho} + 4\rho\dot{\rho}^2 = 0.$$

Moltiplicandola per $\dot{\rho}$ si ha

$$0 = (1 + 4\rho^2)\ddot{\rho}\dot{\rho} + 4\rho\dot{\rho}^3 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(1 + 4\rho^2)\dot{\rho}^2\right].$$

Ne segue che, se $\rho(0) = 0$ e $\dot{\rho}(0) = a \geqslant 0$, si ha

$$(1 + 4\rho^2)\dot{\rho}^2 = a^2.$$

Quindi $\dot{\rho}$ non può mai essere zero e

$$\sqrt{1+4\rho^2}\,\dot{\rho} = a.$$

Ovvero

$$at = \int_0^{\rho(t)} \sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho = \frac{\rho(t)\sqrt{1+\rho(t)^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\rho(t) + \sqrt{1+\rho(t)^2}\right)$$

che mostra che qualunque valore si ρ può essere raggiunto, visto che il membro di destra è una funzione crescente, non limitata, di ρ e quindi è invertibile. Ne segue che la curva più breve è $(s, 0, s^2)$.