Fisica Matematica I

Primo Esonero, Giovedì 29-04-21

Cognome........................ Nome........................

Avete 2:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 15 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si consideri la funzione $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ tale che $g(x) = 0$ per $x \notin [0,1]$ e $\int_0^1 g(t)dt = 1$ e si definisca la forza
$$F_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} g(\varepsilon^{-1} t).$$
Sia x_ε il moto determinato da
$$\begin{aligned} & m\ddot{x}(t) = -\lambda \dot{x}(t) + F_\varepsilon(t) \\ & x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = 0. \end{aligned}$$
Si studi $\lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t)$, $t > 0$.

2. Dato il potenziale $V(x) = -x^3 + 3x$ si consideri il moto determinato da
$$\begin{aligned} & \ddot{x} = -V'(x) - \frac{3}{4}\dot{x} \\ & x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$
si dica
   (a) se il moto è limitato;
   (b) per quale intervallo di tempo il moto è ben definito.

Soluzione

1. Integrando rispetto al tempo, per $t \leqslant \varepsilon$ abbiamo

$$m\dot{x}_\varepsilon(t) = -\lambda x_\varepsilon(t) + \int_0^t F_\varepsilon(s)ds = -\lambda x_\varepsilon(t) + \int_0^{\varepsilon^{-1}t} g(s)ds.$$

Cerchiamo una soluzione della forma $x_\varepsilon(t) = e^{-\frac{\lambda}{m}t} z_\varepsilon(t)$. Allora

$$\dot{z}_\varepsilon(t) = e^{\frac{\lambda}{m}t} \int_0^{\varepsilon^{-1}t} g(s)ds \geqslant 0. \tag{1}$$

Quindi $x_\varepsilon(t) \geqslant 0$ per $t \in [0, \varepsilon]$.
Per $t \geqslant \varepsilon$ abbiamo[1]

$$m\dot{x}_\varepsilon(t) = -\lambda x_\varepsilon(t) + \int_0^1 F_\varepsilon(s)ds = -\lambda x_\varepsilon(t) + 1.$$

Integrando un'altra volta abbiamo

$$m x_\varepsilon(t) = -\lambda \int_0^t x_\varepsilon(s)ds + t.$$

Dunque per Gronwall

$$x_\varepsilon(t) \leqslant t + \frac{\lambda}{m}\int_0^t e^{\frac{\lambda}{m}(t-s)} s ds = t + \frac{m^2}{\lambda^2}e^{\frac{\lambda}{m}t} - \frac{m^2}{\lambda^2} - \frac{m}{\lambda}t$$

che implica

$$x_\varepsilon(\varepsilon) \leqslant a_\varepsilon$$

con $0 \leqslant a_\varepsilon \leqslant C\varepsilon$, per qualche costante C. Ne segue che per $t \geqslant \varepsilon$ si ha che $y_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t+\varepsilon)$ è soluzione di

$$\begin{aligned} &m\ddot{y}_\varepsilon(t) = -\lambda \dot{y}_\varepsilon(t) \\ &y_\varepsilon(0) = a_\varepsilon;\ \dot{y}_\varepsilon(0) = m^{-1}. \end{aligned}$$

Che, infatti, integrando da

$$\begin{aligned} &m\dot{y}_\varepsilon(t) = -\lambda y_\varepsilon(t) + 1 \\ &y_\varepsilon(0) = a_\varepsilon. \end{aligned}$$

Per la continuità rispetto alle condizioni iniziali segue che esiste $y(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t)$ e che soddisfa

$$\begin{aligned} &m\ddot{y}(t) = -\lambda \dot{y}(t) \\ &y(0) = 0;\ \dot{y}(0) = m^{-1}. \end{aligned}$$

Infine, per la continuità delle soluzioni delle ODE si ha che, per ogni $t > 0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t-\varepsilon) = y(t).$$

[1] Infatti, è più semplice continuare ad usare la (1). Uso una strategia leggermente differente solo per fare vedere un'altra possibilità su come affrontare il problema.

Ovvero abbiamo che la forza agisce istantaneamente (i fisici la chiamano un *forza impulsiva*) ed ha il solo effetto di cambiare la condizione iniziale della velocià. Il moto è quindi lo stesso che si avrebbe se la velocità iniziale fosse stata m^{-1}.
Per altro l'equazione per y si risolve facilmente:

$$y(t) = \frac{m}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right).$$

In alternativa, come già detto, si può continuare con la (1) e scrivere

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) &= \int_0^t ds e^{\frac{\lambda}{m}(s-t)} \int_0^{\varepsilon^{-1}s} g(\tau)d\tau \\ &= \int_0^\varepsilon ds e^{\frac{\lambda}{m}(s-t)} \int_0^{\varepsilon^{-1}s} g(\tau)d\tau + \int_\varepsilon^t ds e^{\frac{\lambda}{m}(s-t)}. \end{aligned}$$

Si noti che $\left|\int_0^\varepsilon ds e^{\frac{\lambda}{m}(s-t)} \int_0^{\varepsilon^{-1}s} g(\tau)d\tau\right| \leqslant C\varepsilon$, quindi possiamo facilmente calcolare il limite, per $t > 0$,

$$y(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t) = \int_0^t ds e^{\frac{\lambda}{m}(s-t)} = \frac{m}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right).$$

come già sapevamo.

2. Per comodità poniamo $\lambda = \frac{3}{4}$. Detta E l'energia, allora

$$\dot{E} = -\lambda\dot{x}^2 = -\lambda\sqrt{2(E - V(x))}\dot{x}, \tag{2}$$

fino al tempo in cui $\dot{x} = 0$. Integrando si ha (visto che $\dot{x} > 0$ e quindi si può usare la posizione come variable indipendente)

$$E(x) = 4 - \lambda \int_0^x \sqrt{2(E(y) - V(y))}dy.$$

La particella rimane intrappolata solo se l'energia scende sotto $2 = V(1)$ che è il massimo del potenziale per $x \geqslant 0$. Sia allora $x_* \in [0, 1]$, se esiste, il primo punto in cui $E(x) = 2$, altrimenti poniamo $x_* = 1$. Allora

$$E(x_*) = 4 - \lambda \int_0^{x_*} \sqrt{2(E(y) - V(y))}dy.$$

Vediamo se le stime banali ci dicono qualcosa: prima di tutto $E(x) \leqslant 4$ e $V(x) \geqslant 0$ quindi

$$E(x_*) \geqslant 4 - \frac{4}{3}\int_0^1 \sqrt{8}dy < 2$$

e non possiamo concludere alcunchè. D'altro canto, per definizione $E(x) \geqslant 2$ e $V(x) \leqslant 3x$ e quindi, supponendo $x_* \geqslant \frac{2}{3}$,

$$E(x_*) \leqslant 4 - \frac{4}{3}\int_0^{\min\{\frac{2}{3}, x_*\}} \sqrt{2(2 - 3x)}dy = 4 + \frac{8\sqrt{2}}{27}\left[\left(2 - 3(\frac{2}{3})\right)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right] \leqslant 4 - \frac{32}{27} > 2$$

e nuovamente non possiamo concludere nulla. Occorre quindi fare delle stime più accurate. Tuttavia dalle stime precedenti sembra più ragionevole aspettarsi che la particella superi il massimo del potenziale. Proviamo quindi a fare una stima dal basso dell'energia più accurata. Per l'energia usiamo la stessa stima di prima, dunque

$$E(x_*) \geqslant 4 - \lambda \int_0^{x_*} \sqrt{8 - 2V(y)}dy.$$

Cerchiamo invece di fare meglio per il potenziale. Si noti che, per ogni $x \in [0, 1]$, $V(x) \geqslant 2x$. Ne segue

$$\begin{aligned} E(x_*) &\geqslant 4 - \lambda \int_0^{x_*} \sqrt{8 - 4y}dy \geqslant 4 - \lambda \int_0^1 \sqrt{8 - 4y}dy \\ &= 4 - \frac{4\lambda}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 1\right] = 5 - 2^{\frac{3}{2}} > 2. \end{aligned}$$

Ne segue che il moto supera il massimo del potenziale e dunque non è limitato.

Per rispondere alla seconda domanda si noti che (2) implica che l'energia cala. Sia $\bar{x}$, se esiste, il primo posto in cui diventa negativa. Allora, per ogni $x \geqslant \bar{x}$,

$$\begin{aligned} E(x) &= -\lambda \int_{\bar{x}}^{x} \sqrt{2(E(y) - V(y))}dy \geqslant -\lambda \int_{\bar{x}}^{x} \sqrt{2(y^3 - 3y)}dy \geqslant -\lambda \int_{\bar{x}}^{x} \sqrt{2y^3}dy \\ &= -\lambda\sqrt{2}\frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}} - \bar{x}^{\frac{5}{2}}\right] \geqslant -\lambda\sqrt{2}\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Ma questo implica che, per x sufficientemente grande,

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = E(x) - V(x) \geqslant x^3 - 3x - \sqrt{2}\frac{3}{10}x^{\frac{5}{2}} \geqslant \frac{1}{2}x^3.$$

In altre parole

$$\dot{x} \geqslant x^{\frac{3}{2}}$$

che implica, per ogni $t > t_0$, con t_0 sufficientemente grande,

$$t - t_0 \leqslant \int_{t_0}^{t} x^{-\frac{3}{2}}(s)\dot{x}(s)ds = \int_{x(t_0)}^{x(t)} y^{-\frac{3}{2}}dy = 2x(t_0)^{-\frac{1}{2}} - 2x(t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ovvero,

$$x(t) \geqslant (x(t_0)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(t - t_0))^{-2}.$$

Questa disuguaglianza implica che il moto raggiunge l'infinito in un tempo finito e quindi esiste un $t_+ > 0$ tale che la soluzione è definita solo nell'intervallo $(0, t_+)$.