Fisica Matematica I

Primo Appello, Sessione Autunnale, 22-09-21

Cognome......................... Nome.........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si considerino due particelle di massa uno che si muovono su di una retta unidimensionale. Sia $x(t)$ la posizione della prima particella e $q(t)$ la posizione della seconda, al tempo t. Le due particelle interagiscono con un potenziale $V(x-q)$, dove $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, e $V(a) = 0$ per ogni $|a| \geqslant 1$. Inoltre la seconda particella è soggetta ad una molla, fissata all'origine, di costante elastica 1 e di lunghezza a riposo nulla. Date le condizioni iniziali $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = v > \sqrt{8\|V'\|_\infty}$, e $q(0) = \dot{q}(0) = 0$ si mostri che

   a) esiste $w(v) = \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t)$;

   b) esiste
   $$\lim_{v\to\infty} v[w(v) - v].$$

2. Due dischi uguali, omogenei, di massa $M = 1$ e raggio $R = 1$ sono vincolati a muoversi senza attrito su un piano orizzontale. I loro centri coincidono con due punti fissi del piano C_1 e C_2, posti a distanza 4 tra di loro. Due punti materiali P_1 e P_2 di massa $m_1 = m_2 = 1$, sono fissati ciascuno sul bordo dei rispettivi dischi. Un terzo punto materiale P_3 di massa $m_3 = 1$ è libero di muoversi nel piano. Tra P_1 e P_2, P_1 e P_3, P_3 e P_2 sono applicate delle molle di costante elastica $k = 1$ e lunghezza a riposo nulla. Si scriva la Lagrangiana del sitema. Si verifichi che la configurazione nella quale P_1, P_2 e P_3 sono fermi, collineari al segmento C_1C_2, con P_1 e P_2 posti alla distanza minima tra di loro e P_3 equidistante da C_1 e C_2, è una posizione di equilibrio stabile del sistema.

   Si dica quanti sono i punti di equilibrio del sistema.

3. Si consideri un sistema con lagrangiana $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R})$. Siano dati un aperto limitato $U \subset \mathbb{R}^d$, e $T \in \mathbb{R}$. Si supponga che, per ogni $a, b \in U$ e $t \in [0, T]$, $q(t, a, b)$ sia l'unica soluzione delle equazioni di Lagrange tali che $q(0, a, b) = a$ e $q(T, a, b) = b$. Finalmente sia $p(t, a, b)$ il momento associato. Si mostri che
   $$\frac{\partial}{\partial a} \int_0^T \mathcal{L}(q(t, a, b), \dot{q}(t, a, b))dt = p(0, a, b).$$

Soluzione

1. Le equazioni del moto sono

$$\ddot{x} = -V'(x-q)$$
$$\ddot{q} = V'(x-q) - q.$$

Ne segue che, ponendo $A = \|V'\|_\infty$,

$$|\dot{x}(t) - v| \leqslant tA.$$

Questo significa che per $t < \frac{v}{2A}$ la velocità della particella rimane maggiore di $v/2$. Dunque essa ragiungerà il punto 2 se $\frac{v}{2A}\frac{v}{2} \geqslant 2$, ovvero $v \geqslant \sqrt{8A}$. Quando la particella supera 2 con velocità positiva non è più soggetta ad un potenziale e quindi si muove con velocità uniforme, dunque il limite esiste. Per velocità grandi e $t < \frac{4}{v}$ possiamo scrivere,

$$|\dot{q}(t)| \leqslant \left| \int_0^t V'(x(s) - q(s)) - q(s) ds \right| \leqslant tA + \int_0^t |t-s||\dot{q}(s)| ds \leqslant tA + \frac{4}{v}\int_0^t |\dot{q}(s)| ds.$$

Quindi, per $v \geqslant 4$, la disuguaglianza di Gronwall implica

$$|\dot{q}(t)| \leqslant \left| \int_0^t V'(x(s) - q(s)) - q(s) ds \right| \leqslant tAe.$$

Inoltre

$$\dot{x}(t) = v + \int_0^t V'(x(s) - q(s)) ds.$$

Da cui segue, ponendo $\|V''\|_\infty = B$,

$$\left| \dot{x}(t) - v - \int_0^t V'(-1 + vs) ds \right| \leqslant \int_0^t B \left(\int_0^s |v - \dot{x}(\tau)| d\tau + 8Aev^{-2} \right)$$
$$\leqslant Cv^{-3}$$

per una qualche costante C. Poichè abbiamo visto che $w(v) = \dot{x}(4v^{-1})$, otteniamo

$$\left| w(v) - v - \frac{1}{v}\int_{-1}^1 V'(\xi) d\xi \right| \leqslant Cv^{-3}.$$

Quindi $|w(v) - v| \leqslant Cv^{-3}$ da cui

$$\lim_{v\to\infty} v[w(v) - v] = 0.$$

2. Sia $v(\theta_1)$ la posizione di P_1, dove $v(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Chiamiamo $4e_1 + v(\theta_2)$ la posizione di P_2 e $\xi = (x, y)$ quella di P_3. Allora

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(I+1)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}(I+1)\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}\|\dot{\xi}\|^2 - \frac{1}{2}(\xi - v(\theta_1))^2 - \frac{1}{2}(\xi - 4e_1 - v(\theta_2))^2 - \frac{1}{2}(4e_1 + v(\theta_2) - v(\theta_1))^2$$

dove $I = \frac{1}{2}$. I punti di equilibrio sono determinati dalle equazioni

$$\langle \xi - v(\theta_1), n(\theta_1) \rangle + \langle 4e_1 + v(\theta_2) - v(\theta_1), n(\theta_1) \rangle = 0$$
$$\langle \xi - 4e_1 - v(\theta_2), n(\theta_2) \rangle - \langle 4e_1 + v(\theta_2) - v(\theta_1), n(\theta_2) \rangle = 0$$
$$(\xi - v(\theta_1)) + (\xi - 4e_1 - v(\theta_2)) = 0$$

dove $n(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Dunque

$$\begin{aligned}
&\langle -\xi + 2v(\theta_1) - 4e_1 - v(\theta_2), n(\theta_1)\rangle = 0\\
&\langle -\xi + 8e_1 + 2v(\theta_2) - v(\theta_1), n(\theta_2)\rangle = 0\\
&2\xi - v(\theta_1) - v(\theta_2) - 4e_1 = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Sostituendo l'ultima nelle prime due si ha

$$\begin{aligned}
&\langle v(\theta_2) - v(\theta_1) - 4e_1, n(\theta_1)\rangle = 0\\
&\langle v(\theta_2) - v(\theta_1) - 4e_1, n(\theta_2)\rangle = 0\\
&2\xi = v(\theta_1) + v(\theta_2) + 4e_1
\end{aligned}$$

poichè $n(\theta_1)$ e $n(\theta_2)$ sono perpendicolari allo stesso vettore deve essere $n(\theta_1) = \pm n(\theta_2)$ e quindi $v(\theta_1) = \pm v(\theta_2)$. Ma allora $\langle e_1, n(\theta_i)\rangle = 0$ ovvero $\theta_i \in \{0, \pi\}$. Abbiamo quindi quattro punti di equilibrio. Quello menzionato nel testo corrisponde a $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e $\xi = 2e_1$. Per studiarne la stabilità consideriamo la matrice hessiana. Si ottiene differenziando i membri di sinistra dell (1) e calcolandoli nel punto di equilibrio:

$$H = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 5 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcoliamone gli autovalori

$$\begin{aligned}
\det(\lambda - H) &= (\lambda - 2)\det\begin{pmatrix} \lambda-5 & -1 & 1\\ -1 & \lambda-5 & -1\\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}\\
&= (\lambda - 2)\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ \lambda-6 & \lambda-6 & -1\\ -\lambda^2+3\lambda-9 & \lambda-3 & \lambda-2 \end{pmatrix}\\
&= (\lambda-2)(\lambda-6)\det\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -\lambda^2+7\lambda-9 & \lambda-3 \end{pmatrix}\\
&= (\lambda-2)(\lambda-6)(\lambda^2-2\lambda+6) = (\lambda-2)(\lambda-6)(\lambda-3+\sqrt{3})(\lambda-3-\sqrt{3})
\end{aligned}$$

Dunque tutti gli autovalori sono positivi e il punto di equilibrio è stabile.

3. La funzione
$$S(a,b,t) = \int_0^T \mathcal{L}(q(t,a,b), \dot q(t,a,b))dt$$

si chiama *funzione di Hamilton.* Derivando si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a} S(a,b,t) =& \int_0^T \frac{\partial}{\partial q} \mathcal{L}(q(t,a,b),\dot{q}(t,a,b)) \frac{\partial q(t,a,b)}{\partial a} dt \\
&+ \int_0^T \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \mathcal{L}(q(t,a,b),\dot{q}(t,a,b)) \frac{\partial \dot{q}(t,a,b)}{\partial a} dt \\
=& \int_0^T \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \mathcal{L}(q(t,a,b),\dot{q}(t,a,b)) \frac{\partial q(t,a,b)}{\partial a} dt \\
&+ \int_0^T \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \mathcal{L}(q(t,a,b),\dot{q}(t,a,b)) \frac{\partial \dot{q}(t,a,b)}{\partial a} dt \\
=& \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \mathcal{L}(q(t,a,b),\dot{q}(t,a,b)) \frac{\partial q(t,a,b)}{\partial a} \Big|_{t=0}^{T} \\
&+ \int_0^T \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \mathcal{L}(q(t,a,b),\dot{q}(t,a,b)) \left[\frac{\partial \dot{q}(t,a,b)}{\partial a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial q(t,a,b)}{\partial a} \right] dt
\end{aligned}
$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo usato il fatto che $q(t,a,b)$ è soluzione delle equazioni di Lagrange e quindi abbiamo integrato per parti. Il risultato segue dalla definizione del momento, dal fatto che $\frac{\partial q(0,a,b)}{\partial a} = \frac{\partial a}{\partial a} = \mathbb{1}$, $\frac{\partial q(T,a,b)}{\partial a} = \frac{\partial b}{\partial a} = 0$ e che, grazie alla dipendenza liscia dai dati iniziali e finali, la quatità nella parentesi quadra è nulla per la dipendenza liscia dai dati iniziali e il Lemma di Schwartz.