ARISTOTELE VERSUS NEWTON

CARLANGELO LIVERANI

1. Il mondo secondo Aristotele

Il linguaggio di Aristotele non è facilmente comparabile al nostro: il suo intento era di *spiegare le cause* in maniera *qualitativa* mentre noi siamo più propensi a *descrivere* il mondo in maniera *quantitativa*. Comunque Aristotele postulava che ogni moto avesse una causa e che dunque assenza di cause implicasse assenza di moto. Divideva quindi il moto in naturale (conforme alla natura del mobile) e forzato. La causa del moto naturale non era apparente e non voglio qui inoltrarmi nella discussione di questo punto (che ci porterebbe alla sua dottrina del *motore immobile* tanto cara alla scolastica, San Tommaso in primis), più interessante per noi è il moto forzato. Da quello che viene detto nella Fisica [1, Libro VII, capitolo 5] sembrerebbe che una descrizione equa della teoria del moto forzato secondo Aristotele si data, in termini moderni, dalle equazioni

$$\begin{aligned} \lambda \dot{x} &= F \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove F è la forza applicata, λ una proprietà del corpo che descrive la sua resistenza al moto e $\dot{x}$ la velocità del corpo. La equazione (1.1) è radicalmente differente dalla equazione del moto secondo Newton e predice fatti un poco strani: se un corpo smette di essere spinto, si ferma istantaneamente, cosa contraria alla nostra esperienza quotidiana. Tuttavia Newton predice che il corpo continuarà a muoversi con la stessa velocità e anche questo è contrario alla nostra esperienza. Dunque ambedue le teorie abbisognano di modifiche per cercare di dare conto del mondo che ci circonda, nel caso di Newton si deve introdurre l'*attrito*, nel caso di Aristotele la teoria dell'*impeto* (introdotta per primo da Giovanni Filopono nel sesto secolo e poi raffinata dai filosofi arabi).

Sebbene oggi sia facile farsi beffe della teoria Aristotelica, questa è tutt'altro che stupida e solo una profonda mancanza di comprensione dei meccanismi del progresso scientifico può giustificare un tale comportamento denigratorio. In particolare in questa nota argomento che la dinamica di Aristotele è in realtà un caso estremo di quella di Newton.

2. Il mondo di Newton con un attrito enorme

Consideriamo un moto che si muove sotto l'influenza di un attrito molto grande. Per spostare tale corpo occorrerà una forza molto grande. Questa situazione può essere modellizata in meccanica Newtoniana (nel caso più semplice possibile) come segue

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{x} = -\varepsilon^{-1}\lambda\dot{x} + \varepsilon^{-1}F(x) \\
& x(0) = x_0 \\
& \dot{x}(0) = v_0
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

dove $F \in \mathcal{C}^1$ e ε è un numero piccolo che rende quantitativi i termini *molto grande* usati sopra. Sia $x_\varepsilon(t)$ la soluzione di (2.1). La domanda che ci poniamo è la seguente:

Come è fatto il moto quando ε è molto piccolo?

In temini precisi ci si può chiedere: esiste $\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t)$?

La risposta questa domanda verrà ottenuta attraverso vari risultati intermedi. Cominciamo dal primo, debole ma incoraggiante, fatto. Per semplificare la discussione assumano che $F(x) \leq C|x|$ e che quindi la soluzione esista per tutti i tempi. Inoltre, detta $-V$ la primitiva di F, assumiamo $V \geq 0$.

Lemma 2.1. *Per ogni $T > 0$ sia $x_\varepsilon \in \mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R})$ la soluzione di (2.1). Allora esiste ε_0 tale che l'insieme $K = \{x_\varepsilon\}_{\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ è relativamente compatto nella topologia di $\mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R})$.*[1]

Proof. Prima di tutto è conveniente riscrivere (2.1) come

$$
\varepsilon m\ddot{x} = -\lambda\dot{x} + F(x). \tag{2.2}
$$

L'idea di base è di usare la conservazione della energia da cui si ha

$$
0 \leq \frac{\varepsilon m}{2}\dot{x}_\varepsilon(t)^2 + V(x_\varepsilon(t)) = -\lambda\int_0^t \dot{x}_\varepsilon(s)^2 ds + \frac{\varepsilon m}{2}\dot{v}_0^2 + V(x_0).
$$

Ovvero,

$$
\int_0^t \dot{x}_\varepsilon(s)^2 ds \leq \frac{\varepsilon m}{2\lambda}\dot{v}_0^2 + \lambda^{-1}V(x_0).
$$

L'equazione di cui sopra implica che esiste $C > 0$, indipendente da ε, tale che $\int_0^T \dot{x}_\varepsilon(s)^2 ds \leq C$. Ma questo implica che, per ogni $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$
|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(s)| \leq \int_s^t |\dot{x}_\varepsilon(r)|dr \leq \sqrt{t-s}\cdot\sqrt{\int_0^T \dot{x}_\varepsilon(r)^2 dr} \leq C^{\frac{1}{2}}\sqrt{t-s},
$$

dove, nella seconda disuguaglianza, abbiamo usato la disuguaglianza di Schwartz.[2] Da questa stima segue the tutte le funzioni in K sono uniformemente limitate e uniformemente continue, dunque relativamente compatte per Ascoli-Arzelà.[3] □

Dal Lemma 2.1 segue che K ha dei punti di accumulazione. Se potessimo mostrare che ha *un solo* punto di accumulazione questo immediatamente implicherebbe che le funzioni x_ε tendono uniformemente ad un limite: il moto per attriti enormi. L'idea per ottenere questo risultato è di mostrare che tutti i punti di accumulazione devono soddisfare una qualche proprietà che caratterizza una sola funzione. Un candidato naturale per questo sarebbe mostrare che devono essere soluzioni di una qualche equazione differenziale. Questo è esattamente quello che andiamo a fare.

[1] La topologia di $\mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R})$ è quella della convergenza uniforme.

[2] Se non capite cosa c'entra la disuguaglianza di Schwartz in questo contesto, vedete l'Appendice.

[3] Se non sapete di cosa stiamo parlando, vedete l' Appendice.

Sia $x_*(t)$ un punto accumulazione di K ovvero esiste una successione $\{\varepsilon_j\}$ tale che

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}|x_{\varepsilon_j}-x_*(t)|=0.$$

Moltiplicando la (2.2) per $e^{\frac{\lambda}{\varepsilon m}t}$ si ha

$$\frac{e^{\frac{\lambda}{\varepsilon_j m}t}}{m\varepsilon}F(x_{\varepsilon_j})=e^{\frac{\lambda}{\varepsilon_j m}t}\ddot{x}_{\varepsilon_j}+\frac{\lambda}{\varepsilon_j m}e^{\frac{\lambda}{\varepsilon_j m}t}\dot{x}_{\varepsilon_j}=\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{\lambda}{\varepsilon_j m}t}\dot{x}_{\varepsilon_j}\right]$$

Integrando si ha

$$\begin{aligned}\dot{x}_{\varepsilon_j}(t)&=e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon_j m}t}v_0+\varepsilon_j^{-1}m^{-1}\int_0^t e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon_j m}(t-s)}F(x_{\varepsilon_j}(s))ds\\&=e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon_j m}t}v_0+\lambda^{-1}\int_{-\frac{\lambda}{\varepsilon_j m}t}^0 e^{\tau}F(x_{\varepsilon_j}(t+\varepsilon_j m\lambda^{-1}\tau))d\tau.\end{aligned}$$

Per concludere ci serve un altro piccolo Lemma.

Lemma 2.2. *Per ogni $T>0$ si ha*

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_{-\frac{\lambda}{\varepsilon_j m}t}^0 e^{\tau}F(x_{\varepsilon_j}(t+\varepsilon_j m\lambda^{-1}\tau))d\tau-F(x_*(t))\right|=0.$$

Proof. Si ricordi che le x_ε sono equicontinue ed equilimitate, sia $M>0$ tale $\sup_{\varepsilon\le 1}\sup_{t\in[0,T]}|x_\varepsilon(t)|\le M$. Si noti che F è continua su $[0,T]$ e quindi uniformemente continua. Dunque per ogni $\delta>0$ esiste $\varepsilon_0>0$ tale che, per ogni $\varepsilon\le\varepsilon_0$ si ha, per ogni $t\in[0,T]$, e $|s|\le\sqrt{\varepsilon}$

$$|F(x_\varepsilon(t+s))-F(x_\varepsilon(t))|\le\delta.$$

Inoltre esiste j_0 tale che, per $j>j_0$,

$$|F(x_{\varepsilon_j}(t))-F(x_*(t))|\le\delta.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\lambda}{\varepsilon_j m}t}^0 e^{\tau}F(x_{\varepsilon_j}(t+\varepsilon m\lambda^{-1}\tau))d\tau&=\int_{-\varepsilon_j^{-\frac12}}^0 e^{\tau}F(x_{\varepsilon_j}(t+\varepsilon m\lambda^{-1}\tau))d\tau+\mathcal{O}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon_j^{-\frac12}}e^{\tau}\right)\\&=\int_{-\infty}^0 e^{\tau}F(x_*(t))+\mathcal{O}(e^{-\varepsilon_j^{-\frac12}}+\delta).\end{aligned}$$

Da cui il Lemma segue per l'arbitrarietà di δ. □

Dunque $\dot{x}_\varepsilon$ converge uniformemente in ogni intervallo $[a,T]$, $a>0$.[4] Questo implica che $x_*\in\mathcal{C}^1((0,T],\mathbb{R})\cap\mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R})$ soddisfa il problema di Cauchy (1.1). Ovvero abbiamo recuperato la dinamica Aristotelica come caso limite di quella Newtoniana.

[4]Si noti che questo non è vero in $[0,T]$. Infatti occorre attendere un tempo proporzionale a ε perchè $\dot{x}_\varepsilon(t)$ dimentichi la sua condizione iniziale. Questo è inevitabile visto che le equazioni di Aristotele sono del primo ordine e quindi uno non può specificare sia $x(0)$ che $\dot{x}(0)$ e sperare di avere una soluzione. Si noti in particolare che $\dot{x}_\varepsilon(t)$ esplode per $t<0$.

3. Il mondo visto dai moscerini

Per concludere notiamo che l'equazione (2.2) suggerisce un'altra interpretazione del nostro limite: il moto di una massa molto piccola. Ma allora se noi fossimo molto più piccoli, tipo moscerini o ancora più piccoli (tipo una ameba), avremmo una esperienza molto più vicina alla dinamica (1.1) che a quella (2.1). Essendosi il nostro cervello evoluto in tali condizioni troveremmo completamente intuitiva la meccanica Aristotelica. Basandoci sul *buon senso* ci verrebbe quindi spontaneo ridicolizzare Newton e trovare il discorso di Aristotele *secondo natura*. Probabilmente la dinamica di Newton, una volta scoperta (dopo sofisticati esperimenti e, probabilmente, qualche rogo), ci parrebbe tanto esoterica come a noi sembra controintuitiva la teoria della relatività ristretta (di cui quella Newtoniana è, appunto, un caso limite per piccole velocità).

Appendix A. Cose tecniche che potreste non sapere

Cominciamo con la disuguaglianza di Schwartz per funzioni continue.

Lemma A.1. *Sia $T > 0$. Per ogni $f, g \in \mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R})$ si ha*

$$\left|\int_0^T f(x)\cdot g(x)dx\right| \leq \left[\int_0^T f(x)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^T g(x)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Proof. La dimostrazione è identica a quella per il prodotto scalare in uno spazio vettoriale (per questo porta lo stesso nome): per ogni $\lambda > 0$ si ha

$$0 \leq \int_0^T [f(x) - \lambda g(x)]^2 dx = \int_0^T f(x)^2 dx - 2\lambda \int_0^T f(x)\cdot g(x)dx + \lambda^2 \int_0^T g(x)^2 dx.$$

Ora un polinomio di secondo grado non ha radici reali distinte se e solo se il discriminante è negativo, ovvero

$$\left[\int_0^T f(x)\cdot g(x)dx\right]^2 - \left[\int_0^T f(x)^2 dx\right]\cdot\left[\int_0^T g(x)^2 dx\right] \leq 0$$

da cui il Lemma segue immediatamente. □

Affrontiamo ora il problema dei sottoinsiemi compatti in $\mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R})$. Cosa intendiamo ?

Definizione 1. *Un sottoinsieme $K \subset \mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R})$ si dice* relativamente compatto *se per ogni successione $\{f_n\} \subset K$ è possibile estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente, ovvero esiste $\{f_{n_j}\} \subset \{f_n\}$ e $f_* \in \mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R})$ tale che*

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in[0,T]} |f_{n_j}(x) - f_*(x)| = 0.$$

Se per ogni sottosuccesione convergente il limite appartiene a K, allora K si dice compatto.

Il problema è caratterizzare come sono fatti gli insiemi compatti in $\mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R})$. A questo proposito due proprieà sono utili.

Definizione 2. *Un insieme di funzioni $K \subset \mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R})$ si dice* equiliminato *se esiste un $M > 0$ tale che*

$$\sup_{f\in K} \sup_{x\in[0,T]} |f(x)| \leq M.$$

Definizione 3. *Un insieme di funzioni* $K \subset \mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R})$ *si dice* equicontinuo *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che, per ogni* $f \in K$ *e* $x, y \in [0,T]$ *tali che* $|x-y| \leq \delta$ *si ha*[5]

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Possiamo ora dare la caratterizzazione cercata.

Teorema A.2 (Ascoli-Arzelà)**.** *Un insieme* $K \subset \mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R})$ *è relativamente compatto se e solo se è equilimitato ed equicontninuo. Inoltre, se ogni successione convergente converge ad un elemento di* K *(ovvero* K *è chiuso), allora è compatto.*

Proof. Cominciamo con la sufficienza: sia $\{f_n\} \subset K$, allora la successione è equilimitata ed equicontinua. Sia dato $\varepsilon > 0$. Allora esite $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $|x-y| < N^{-1}$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Poniamo allora $x_k = kN^{-1}$. In $[0,T]$ avremo circa NT tali punti. Per ogni k consideriamo allora la successione $\{f_n(x_k)\}$. Tale succesione è contenuta, per ipotesi, in un intevallo limitato. Ma allora sappiamo che si può estrarre una sottosuccesione convergente $\{f_{n_j^1}(x_1)\}$. Consideriamo ora la sottosuccesione $\{f_{n_j^1}(x_2)\}$. Di nuovo è limitata e quindi se ne può estrarre una ulteriore sottosuccessione convergente $\{f_{n_j^2}(x_2)\}$. Coninutando in questo modo si otterrà una sottosuccesione $\{f_{n_j^N}\}$ che converge su tutti i punti $\{x_i\}$ in $[0,T]$. Dunque esiste un j_0 tale che, per ogni $j, m \geq j_0$, si ha

$$\sup_i |f_{n_j^N}(x_i) - f_{n_m^N}(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ma allora, per ogni $x \in [0,T]$ e $j, m \geq j_0$, detto x_i il punto più vicino a x, si ha

$$\begin{aligned}|f_{n_j^N}(x) - f_{n_m^N}(x)| &\leq |f_{n_j^N}(x) - f_{n_j^N}(x)| + |f_{n_j^N}(x_i) - f_{n_m^N}(x_i)| + |f_{n_m^N}(x) - f_{n_m^N}(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Sfortunatamente la successione ottenuta dipende da ε, mentre noi volgiamo una successione che funziona per ogni ε. Presto fatto: sia $\varepsilon_\ell = 2^{-\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}$. La costruzione di cui sopra, con $\varepsilon = \varepsilon_1$, ci dice che esiste $\bar{f}_1 \in K$ tale che l'insieme $K_1 = \{f \in K \;:\; \sup_x |f(x) - \bar{f}_1(x)| \leq 2\varepsilon_1\}$ contiene infiniti elementi. D'altro canto K_1 è un insieme di funzioni equilimitate ed equicontinue come K. Possiamo dunque applicare l'argomento di cui sopra a K_1, ma questa volta con $\varepsilon = \varepsilon_2$, e otteniamo una funzione $\bar{f}_2 \in K_1$ e un nuovo insieme $K_2 = \{f \in K \;:\; \sup_x |f(x) - \bar{f}_2(x)| \leq 2\varepsilon_2\}$ che contiene ancora infiniti elementi. Procedendo in questo modi otteniamo un successione $\{\bar{f}_k\}$ tale che $\bar{f}_k \in K_j$ per ogni $j < k$. Tale successione è convergente. Infatti per ogni $\varepsilon > 0$ sia j_* tale che $\varepsilon_{j_*} \leq \varepsilon$, allora, per ogni $k, j < j_* - 1$ si ha che $\bar{f}_k, \bar{f}_j \in K_{j_*}$ e dunque

$$\sup_{x \in [0,T]} |\bar{f}_j(x) - \bar{f}_k(x)| \leq \varepsilon_{j_*} \leq \varepsilon.$$

Ma allora, per ogni $x \in [0,T]$, si ha che $\{\bar{f}_n(x)\}$ è una sequenza di Chauchy e quindi ha un limite, chiamiamolo f_*. Si noti che $\{\bar{f}_n\}$ converge uniformemente a f_* e dunque $f_* \in \mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R})$ e questo conclude la prima parte del Teorema. La seconda parte, ovvero la necessità, non ci serve in questa nota e la lasciamo all'intrepido lettore (suggerimento: lo si provi per assurdo). □

[5] Si noti che δ dipende solo da ε e **non** da f o da x, y.

References

[1] Aristotele, Fisica, Libri I–VIII. Translated in english by R. P. Hardie and R. K. Gaye

[2] Newton, Isaac. *The Principia: mathematical principles of natural philosophy.* Vol. 1,2. Translation by Motte, revised by Cajori. University of California Press, Berkeley, CA, 1962.

Carlangelo Liverani, Dipartimento di Matematica, II Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy.

E-mail address: liverani@mat.uniroma2.it