INTEGRALI IN PIÙ VARIABILI

CARLANGELO LIVERANI

Questa nota intende dare alcune informazioni di base sulla teoria della integrazione in più variabili. Lo scopo è di presentare la teoria nel modo più semplice possibile in modo da permettere l'uso della integrazione in alcuni casi semplici senza dovere sviluppare tutta la teoria generale.

1. Integrazione su Domini regolari

In una dimensione il dominio di un integrale è sempre un intervallo, in più dimensioni la geometria è molto più complessa ed esistono un mucchio di forme possibili. Qui ci limiteremo al caso più semplice.

Definitione 1.1. *Un aperto $D \subset \mathbb{R}^d$ è detto un* dominio elementare *se: a) è limitato; b) $d = 1$ e D è un intervallo; c) $d > 1$, esiste un dominio elementare $D' \subset \mathbb{R}^{d-1}$, $k \in \{1, \dots, d\}$ e due funzioni $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{d-1}, \mathbb{R})$ tali che*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ \bar{x} := (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d) \in D' \, , \ x_k \in (g(\bar{x}), f(\bar{x}))\}.$$

Un dominio regolare *è un insieme $D = \cup_i \overline{D}_i$ dove $\{D_i\}$ è una collezione finita di insiemi elementari disgiunti.*

Dato un punto $x \in \mathbb{R}^d$ definiamo il cubo di lato r come

$$C_{d,r}(x) = \{y \in \mathbb{R}^d \ : \ \|y - x\|_{\ell^\infty} < r/2\},$$

dove $\|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{i \in \{1,\dots,d\}} |x_i|$.

Definitione 1.2. *Data una funzione $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ e un insieme limitato D se esistono i due limiti*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ C_{d,1/n}\left(\frac{k}{n}\right) \cap D \neq \emptyset}} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) n^{-d} := \lim_{n\to\infty} S_n^+(\varphi) \\
&\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ C_{d,1/n}\left(\frac{k}{n}\right) \subset D}} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) n^{-d} := \lim_{n\to\infty} S_n^-(\varphi)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

e sono uguali, allora definiamo l'integrale (di Riemann) di φ su D come

$$\int_D \varphi(x) dx := \lim_{n\to\infty} S_n^-(\varphi).$$

Il prossimo lemma mostra che l'integrale è ben definito su una vasta classe di insiemi.

Lemma 1.3. *Se $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ e $D \subset \mathbb{R}^d$ è un dominio elementare allora $\int_D \varphi(x)dx$ è ben definito.*

Date: March 13, 2021.

Proof. Poichè D è limitato, per definizione esiste un $L \in \mathbb{R}_+$ tale che $D \subset C_{d,L}(0)$. Poichè φ è continua esite M tale che

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}^1(C_{d,L}(0))} := \sup_{x\in C_{d,L}(0)} |\varphi(x)| + \sup_{x\in C_{d,L}(0)} \|\nabla\varphi(x)\| \leq M. \tag{1.2}$$

Sia

$$\partial_\varepsilon(D) = \{k \in \mathbb{Z}^d \ : \ C_{d,\varepsilon}(k\varepsilon) \cap \partial D \neq \emptyset\}, \tag{1.3}$$

questi sono i cubetti che intersecano la frontiera di D. Si noti che

$$\begin{aligned}\left| \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d\\ C_{d,\varepsilon}(k\varepsilon)\cap D\neq\emptyset}} \varphi(k\varepsilon)\varepsilon^d - \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d\\ C_{d,\varepsilon}(k\varepsilon)\subset D}} \varphi(k\varepsilon)\varepsilon^d \right| &\leq \sum_{k\in\partial_\varepsilon(D)} |\varphi(k\varepsilon)|\varepsilon^d \\ &\leq M \sum_{k\in\partial_\varepsilon(D)} \varepsilon^d.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Dobbiamo quindi stimare la cardinalità di $\partial_\varepsilon(D)$. Vogliamo mostrare per induzione sul numero di dimensioni che per ogni $D \subset \mathbb{R}^d$ elementare esiste una costante C tale che, per ogni $\varepsilon > 0$, $\#\partial_\varepsilon(D) \leq C\varepsilon^{d-1}$.[1]
Se $d = 1$ allora D è un intervallo e la frontiera consiste di due punti quindi $\partial_\varepsilon(D)$ consisterà al massimo di due elementi. Dunque l'affermazione è vera con $C = 2$. Supponiamo che sia vera per d. Allora, dato $D \in \mathbb{R}^{d+1}$, eventualmente permutando l'ordine delle coordinate, abbiamo

$$D = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \ : \ (x_1, \dots, x_d) \in D' \, , \ x_{d+1} \in (g(x_1, \dots, x_d), f(x_1, \dots, x_d))\}.$$

Esercizio 1.4. *Si mostri che* $\partial D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$*, dove*

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \ : \ (x_1, \dots, x_d) \in \partial D' \, , \ x_{d+1} \in (g(x_1, \dots, x_d), f(x_1, \dots, x_d))\} \\ D_2 &= \{(x_1, \dots, x_d, g(x_1, \dots, x_d)) \ : \ (x_1, \dots, x_d) \in D'\} \\ D_3 &= \{(x_1, \dots, x_d, f(x_1, \dots, x_d)) \ : \ (x_1, \dots, x_d) \in D'\}. \end{aligned}$$

Dunque, ricordando la definizione (1.3),

$$\sharp\partial_\varepsilon(D) \leq \sum_{l=1}^{3} \sharp\{k \in \mathbb{Z}^{d+1} \ : \ C_{d,\varepsilon}(k\varepsilon) \cap D_l \neq \emptyset\}.$$

Esercizio 1.5. *Sia definita la proiezione* $\pi(x_1, \dots, x_{d+1}) = (x_1, \dots, x_d)$*. Si verifichi che* $\pi(C_{d+1,\varepsilon}(x)) = C_{d,\varepsilon}(\pi(x))$ *e che* $\pi(D_1) = \partial D'$*.*

Per l'esercizio 1.5 si ha che, se $C_{d+1,\varepsilon}(k\varepsilon) \cap D_1 \neq \emptyset$, allora $C_{d,\varepsilon}(\pi(k)\varepsilon) \cap \partial D' \neq \emptyset$. D'altro canto, per ogni $\bar{k} \in [-L\varepsilon^{-1}, L\varepsilon^{-1}]^d \cap \mathbb{Z}^d$ esistono solo $\varepsilon^{-1}L$ interi k_{d+1} tali che $(\bar{k}, k_{d+1}) \in [-L\varepsilon^{-1}, L\varepsilon^{-1}]^{d+1} \cap \mathbb{Z}^{d+1}$. Ne segue che, per l'ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned}\sharp\{k \in \mathbb{Z}^{d+1} \ : \ C_{d+1,\varepsilon}(k\varepsilon) \cap D_1 \neq \emptyset\} &\leq \varepsilon^{-1}L\sharp\{k \in \mathbb{Z}^d \ : \ C_{d,\varepsilon}(k\varepsilon) \cap \partial D' \neq \emptyset\} \\ &= \varepsilon^{-1}L\sharp\partial_\varepsilon D' \leq C\varepsilon^{-d}.\end{aligned}$$

[1]Dato un insieme discreto A, con $\sharp A$ intendiamo la cardinalità di A, ovvero il numero dei suoi elementi.

D'altro canto per ogni $x \in C_{d,\varepsilon}(\varepsilon k)$,

$$
\begin{aligned}
|g(x) - g(\varepsilon k)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} g(tx + (1-t)\varepsilon k) dt \right| \\
&= \left| \int_0^1 \langle \nabla g(tx + (1-t)\varepsilon k), x - \varepsilon k \rangle dt \right| \leq \|g\|_{\mathcal{C}^1} \varepsilon.
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Questo significa che, per ogni $\bar{k} \in \mathbb{Z}^d$, l'insieme

$$\{k = (\bar{k}, k_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \ : \ C_{d,\varepsilon}(k\varepsilon) \cap D_2 \neq \emptyset\}$$

può consistere al più $\|g\|_{\mathcal{C}^1}$ elementi. Lo stesso argomento vale per D_3, dunque esiste una costante $C_1 > 0$ tale che

$$\sum_{l=2}^{3} \sharp\{k \in \mathbb{Z}^{d+1} \ : \ C_{d,\varepsilon}(k\varepsilon) \cap D_1 \neq \emptyset\} \leq C_1 \sharp\{k \in \mathbb{Z}^d \ : \ C_{d,\varepsilon}(k\varepsilon) \cap D' \neq \emptyset\} \leq C_1 L \varepsilon^{-d}$$

il che conclude l'induzione.

Ne segue che possiamo continuare la stima in (1.4) e scrivere

$$\left| \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ C_{d,\varepsilon}(k\varepsilon) \cap D \neq \emptyset}} \varphi(k\varepsilon)\varepsilon^d - \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ C_{d,\varepsilon}(k\varepsilon) \subset D}} \varphi(k\varepsilon)\varepsilon^d \right| \leq C\varepsilon.$$

Questo implica, ponendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$, che se uno dei due limiti esiste anche l'altro esiste e sono uguali. Rimane da dimostrare l'esistenza

Cominciamo col confrontare $S_n^-(\varepsilon)$ con $S_{pn}^-(\varphi)$, per ogni $p \in \mathbb{N}$:

$$S_n^-(\varphi) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ C_{d,1/pn}\left(\frac{k}{pn}\right) \subset D}} \varphi\left(\frac{k}{pn}\right) p^{-d} n^{-d} = \sum_{j \in \{1,\dots p\}^d} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ C_{d,1/pn}\left(\frac{kp+j}{pn}\right) \subset D}} \varphi\left(\frac{kp+j}{pn}\right) p^{-d} n^{-d}$$

Argomentando come in (1.5) abbiamo

$$\left| \varphi\left(\frac{kp+j}{pn}\right) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq Cn^{-1}.$$

Dunque

$$\left| S_n^-(\varphi) - \sum_{j \in \{1,\dots p\}^d} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ C_{d,1/pn}\left(\frac{kp+j}{pn}\right) \subset D}} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) p^{-d} n^{-d} \right| \leq Cn^{-1}.$$

Si noti che se $C_{d,1/n}\left(\frac{k}{n}\right) \subset D$, allora $C_{d,1/pn}\left(\frac{kp+j}{pn}\right) \subset C_{d,1/n}\left(\frac{k}{n}\right) \subset D$ per ogni $j \in \{1, \dots p\}^d$ e

$$\cup_{j \in \{1,\dots p\}^d} \overline{C_{d,1/pn}} = \overline{C_{d,1/n}}.$$

Quindi

$$\left| S_n^-(\varphi) - S_{pn}^-(\varphi) \right| \leq C \left| S_n^-(1) - S_n^+(1) \right| + Cn^{-1} \leq Cn^{-1}.$$

Da questo segue che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$,

$$\left| S_n^-(\varphi) - S_m^-(\varphi) \right| \leq \left| S_n^-(\varphi) - S_{mn}^-(\varphi) \right| + \left| S_{mn}^-(\varphi) - S_m^-(\varphi) \right| \leq Cn^{-1}.$$

Dunque $S_n^-(\varphi)$ è una successione di Cauchy e quindi ha limite, e questo conclude la dimostrazione. $\square$

Se avete capito la dimostrazione precedente allora potete facilmente risolvere i seguenti esercizi.

Esercizio 1.6. *Si mostri che per ogni $\varphi \in \mathcal{C}^1$ e regione regolare D, l'integrale $\int_D \varphi(x)dx$ è ben definito.*

Esercizio 1.7. *Dato $\ell, a \in \mathbb{R}^d$, e $L \in \mathbb{R}_+$. Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x - a, \ell\rangle = 0\,,\ \|x\| \leq L\}$. Si mostri che $\int_A 1dx = 0$.*

Esercizio 1.8. *Sia $D \subset \mathbb{R}^d$ tale che ∂D è contenuto nella unione finita di insiemi A_i definiti come nell'esercizio 1.7. Si mostri che, per ogni $\varphi \in \mathcal{C}^1$, $\int_D \varphi$ è ben definito.*

2. Fubini (versione baby)

La prima cosa che vogliamo fare con gli integrali è calcolarli. Uno strumento fondamentale per farlo è il seguente.

Teorema 2.1. *Dato un dominio elementare*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^d \ :\ \bar{x} := (x_1, \dots, x_{d-1}) \in D'\,,\ x_d \in (g(\bar{x}), f(\bar{x}))\}$$

e $\varphi \in \mathcal{C}^1$ abbiamo

$$\int_D \varphi(x)dx_1 \cdots x_d = \int_{D'} dx_1 \cdots x_{d-1} \left[\int_{g(x_1,\cdots,x_{d-1})}^{f(x_1,\cdots,x_{d-1})} \varphi(x)dx_d\right].$$

Proof. Prima di tutto occorre verificate che la parte di destra dell'enunciato è ben definita.

Esercizio 2.2. *Data la funzione*

$$\psi(x_1, \cdots, x_{d-1}) = \int_{g(x_1,\cdots,x_{d-1})}^{f(x_1,\cdots,x_{d-1})} \varphi(x)dx_d$$

si mostri che $\psi \in \mathcal{C}^1$.

Ponendo, per $\bar{x} \in D'$ e $r \in \mathbb{R}_+$, definiamo

$$\Sigma(\bar{x}, r) = \{k_d \in \mathbb{R} \ :\ k_d r \in (g(\bar{x}) + r/2, f(\bar{x}) - r/2)\}.$$

Allora,

$$S_n^-(\varphi) = \sum_{\substack{\bar{k}\in\mathbb{Z}^{d-1} \\ C_{d-1,1/n}\left(\frac{\bar{k}}{n}\right)\subset D'}} \left[\sum_{k_d \in \Sigma(\bar{k}n^{-1}, n)} \varphi\left(\frac{(\bar{k}, k_d)}{n}\right) n^{-1}\right] n^{-d+1}.$$

Visto che la nostra definizione di integrale in una dimensione corrisponde all'integrale di Riemann, abbiamo

$$\left|\psi(\bar{k}n^{-1}) - \sum_{k_d \in \Sigma(\bar{k}n^{-1}, n)} \varphi\left(\frac{(\bar{k}, k_d)}{n}\right)\right| \leq Cn^{-1}.$$

Il Lemma segue dalla definizione di integrale. $\square$

3. Volumi e matrici

L'integrale ci permette di definire il volume di una regione regolare come

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_D dx. \tag{3.1}$$

Esercizio 3.1. *Si mostri che* $\mathrm{Vol}(C_{d,r}(x)) = r^d$.

Esercizio 3.2. *Si mostri, dati due domini regolari* D_1, D_2 *con interno disgiunto,* $\mathrm{Vol}(D_1 \cup D_2) = \mathrm{Vol}(D_1) + \mathrm{Vol}(D_2)$.

La nostra definizione di volume ha quindi le proprietà a cui siamo abituati.

Dati $l + 1$ vettori $a, v_1, \ldots, v_l \in \mathbb{R}^d$, $l \leq d$, definiamo il parallelepipedo

$$P^d(a, v_1, \ldots, v_l) = \left\{ a + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i \ : \ \lambda_i \in (0, 1) \right\}. \tag{3.2}$$

Esercizio 3.3. *Si verifichi che per* $d = 1, 2, 3$ *la definizione* (3.2) *corrisponde a quella che ci hanno insegnato alle elementari.*

Esercizio 3.4. *Si mostri che se* $l < d$ *allora* $\mathrm{Vol}(P^d(a, v_1, \ldots, v_l)) = 0$.

Esercizio 3.5. *Si mostri che per* $\{a_i\}_{i=1}^d \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{Vol}(P^d(0, a_1 e_1, \ldots, a_l e_l)) = \prod_{l=1}^d |a_i|$.

Il prossimo lemma mostra che la nostra definizione è invariante per traslazione, come ci aspetteremmo intuitivamente.

Lemma 3.6. *Sia* Ω *un insieme regolare e* $a \in \mathbb{R}^n$. *Si definisca il traslato di* Ω: $\Omega(a) = \{v \in \mathbb{R}^d \ : \ v - a \in \Omega\}$. *Allora*

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \mathrm{Vol}(\Omega(a)).$$

Proof. Si definisca $a^n = n^{-1}(\lceil na_1 \rceil, \ldots, \lceil na_d \rceil)$. La prima cosa rilevante è che se $C_{d,n^{-1}}(n^{-1}k) \subset \Omega$ allora $C_{d,n^{-1}}(n^{-1}k + a^n) \cap \Omega(a) \neq 0$. Infatti, per definizione, $C_{d,n^{-1}}(n^{-1}k + a) \subset \Omega(a)$. Poichè, per costruzione, $\|a - a^n\|_{\ell^\infty} \leq \frac{1}{n}$, ne segue che $n^{-1}k + a^n \in C_{d,n^{-1}}(n^{-1}k + a)$ e dunque $C_{d,n^{-1}}(n^{-1}k + a^n) \cap \Omega(a) \neq \emptyset$. Con un ragionamento analogo si può dimostrare che se $C_{d,n^{-1}}(n^{-1}k) \subset \Omega(a)$ allora $C_{d,n^{-1}}(n^{-1}k - a) \cap \Omega \neq \emptyset$. Quindi

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ C_{d,1/n}\left(\frac{k}{n}\right) \subset \Omega}} n^{-d} \leq \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ C_{d,1/n}\left(\frac{k}{n}\right) \cap \Omega(a) \neq \emptyset}} n^{-d}$$

che, prendendo il limite per $n \to \infty$, implica

$$\mathrm{Vol}(\Omega) \leq \mathrm{Vol}(\Omega(a)).$$

Scambiando il ruolo dei due insiemi segue l'uguaglianza. □

Il prossimo Teorema è piuttosto sorprendente in quanto connette un concetto puramente geometrico (volume) con uno puramente algebrico (determinante).

Teorema 3.7. *Dati* d *vettori* $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^d$, *definiamo la matrice*

$$A(v_1, \ldots, v_d) = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_d \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\mathrm{Vol}(P^d(0, v_1, \ldots, v_d)) = |\det(A(v_1, \ldots, v_d))|.$$

Proof. Si noti che se i vettori $v_1, \dots, v_d \in \mathbb{R}^d$ sono linearmente dipendenti allora esiste $w \in \mathbb{R}^d$ tale che $\langle v_i, w\rangle = 0$ per ogni i. Ma allora il Teorema segue dall'esercizio 1.7 e dalle proprietà del determinante. Da ora in poi assumiamo quindi che i vettori $v_1, \dots, v_d \in \mathbb{R}^d$ siano linearmente indipendenti.

In nostro obiettivo è di costruire un parallelepipedo rettangolo con le facce parallele agli assi e con lo stesso volume di $P^d(0, v_1, \dots, v_d)$. Otterremo questo risultato modificando gradualmente il parallelepipedo in modo da rendere i vettori che lo definiscono sempre più paralleli agli assi.

Dato $k \in \{1, \dots, d\}$ si noti che deve esistere almeno un $i \in \{1, \dots, d\}$ per cui $\langle e_k, v_i\rangle \neq 0$, altrimenti i vettori $\{v_i\}$ sarebbero linearmente dipendenti.

Si consideri un indice $j \neq i$ e si definisca $w = \alpha v_i + v_j$, $\alpha = -\frac{\langle v_j, e_k\rangle}{\langle v_i, e_k\rangle}$. Si noti che $\langle w, e_k\rangle = 0$. Inoltre sia $w^\perp \in \operatorname{span}\{v_i, v_j\}$, un vettore unitario perpendicolare a w e tale che $\langle w^\perp, v_i\rangle > 0$.[2]

Il nostro primo passo è di costruire un nuovo parallelepipedo, con lo stesso volume di quello originario, in cui v_j è sostituto da w (che, essendo perpendicolare a e_k, è orientato un poco meglio rispetto agli assi).

Ovviamente se $\alpha = 0$, allora non c'è nulla da fare. Possiamo quindi restringerci al caso $\alpha \neq 0$.

Si supponga $\alpha > 0$. Definiamo

$$
\begin{aligned}
T &= \left\{ \sum_{k=1}^d \lambda_k v_k \;:\; \lambda_k \in [0,1], \langle [\lambda_i v_i + \lambda_j v_j] - \alpha v_i, w^\perp\rangle \leq 0 \right\}\\
\tilde T &= \{v + v_i \;:\; v \in T\}.
\end{aligned}
$$

Il punto della precedente definizione è che

$$
(P^d(0, v_1, \dots, v_d) \setminus T) \cup \tilde T = P^d(\alpha v_1, v_1, \dots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \dots v_d). \tag{3.3}
$$

Infatti, se $v = \sum_{k=1}^d \lambda_k v_k \in T$ allora

$$
0 \geq \langle w^\perp, (\lambda_i - \alpha) v_i + \lambda_j v_j\rangle = \langle w^\perp, (\lambda_i - \alpha) v_i + \lambda_j (w - \alpha v_i)\rangle = [\lambda_i - (1+\lambda_j)\alpha]\langle w^\perp, v_i\rangle
$$

which is equivalent to $\lambda_i \leq (1+\lambda_j)\alpha$. Quindi, se $v \in P^d(0, v_1, \dots, v_d) \setminus T$, abbiamo

$$
v = \alpha v_i + \sum_{k \neq \{i,j\}} \lambda_k v_k + [\lambda_i - (1+\lambda_j)\alpha] v_i + \lambda_j w.
$$

D'altro canto se $v \in T$,

$$
v + v_i = \alpha v_i + \sum_{k \neq \{i,j\}} \lambda_k v_k + [1 + \lambda_i - (1-\lambda_j)\alpha] v_i + \lambda_j w.
$$

Si noti che, per un λ_j fisso, se $v \notin T$, allora $\lambda_i - (1+\lambda_j)\alpha \in [0, 1 - (1+\lambda_j)\alpha]$, mentre nell'altro caso $1 + \lambda_i - (1-\lambda_j)\alpha \in [1, 1 - (1+\lambda_j)\alpha]$. L'equazione (3.3) segue.

Esercizio 3.8. *Se i conti algebrici precedenti vi hanno confuso e non capiste che sta succedendo, considerate il caso $d = 1$ $i = 1, j = 2$ e fate dei disegni corrispondenti a tutte le quantità e operazioni definite sopra.*

Esercizio 3.9. *Dimostrate la* (3.3) *nel caso $\alpha < 0$.*

[2] Si noti che se $\langle w^\perp, v_i\rangle = 0$ allora v_i deve essere proporzionale a w, ma questo non è possibile visto che $\langle e_k, v_i\rangle \neq 0$, per ipotesi, mentre $\langle w, e_k\rangle = 0$.

Esercizio 3.10. *Si verifichi che T e $\tilde{T}$ sono insiemi regolari.*

Poichè per l'Esercizio 3.10 e il Lemma 3.6 $\mathrm{Vol}(T) = \mathrm{Vol}(\tilde{T})$, l'equazione (3.3) implica, ponendo $v_j^{(1)} := w$,

$$\mathrm{Vol}(P^d(0, v_1, \dots, v_d)) = \mathrm{Vol}(P^d(0, v_1, \dots, v_{j-1}, v_j^{(1)}, v_{j+1}, \dots v_d)).$$

Poichè la scelta di j era arbitraria, ne segue che

$$\mathrm{Vol}(P^d(0, v_1, \dots, v_d)) = \mathrm{Vol}(P^d(0, v_1^{(1)}, \dots, v_d^{(1)})),$$

dove $\langle v_l^{(1)}, e_k \rangle = 0$ per ongi $l \neq i$ e $v_i^{(1)} = v_i$.

Si noti che anche k era arbitrario. Supponiamo che si fosse scelto $k = 1$, e chiamiamo il corrispondete i, i_1. Consideriamo ora $k = 2$. Se $\langle v_i^{(1)}, e_2 \rangle = 0$ per ogni $i \neq i_1$ questo implica che i $d - 1$ vettori $\{v_i^{(1)}\}_{i \neq i_1}$ sono perpendicolari sia a e_1 che a e_2, ma allora non possono essere linearmente indipendenti, contrariamente all'ipotesi. Possiamo quindi scegliere i_2 tale che $\langle v_{i_2}^{(1)}, e_2 \rangle \neq 0$ e applicare il ragionamento precedente. In tal modo otteniamo nuovi vettori $v_l^{(2)}$ tali che

$$\mathrm{Vol}(P^d(0, v_1, \dots, v_d)) = \mathrm{Vol}(P^d(0, v_1^{(2)}, \dots, v_d^{(2)})),$$

e che sono tutti perpendicolari a e_1, e_2 a parte $v_{i_1}^{(2)}$ che non è perpendicolare a e_1 e $v_{i_1}^{(2)}$ che non è perpendicolare a e_2. Continuando in questa maniera si ottengono vettori $v_l^{(d)}$ e indici i_l tali che

$$\mathrm{Vol}(P^d(0, v_1, \dots, v_d)) = \mathrm{Vol}(P^d(0, v_1^{(d)}, \dots, v_d^{(d)})),$$

dove $\langle v_{i_l}^{(d)}, e_k \rangle = 0$ per tutti i $k \neq l$. Ne segue che $v_{i_l}^{(d)} = \beta_l e_l$ per qualche numero β_l. Finalmente possiamo concludere: l'Esercizio 3.5 implica

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(P^d(0, v_1, \dots, v_d)) = \mathrm{Vol}(P^d(0, v_1^{(d)}, \dots, v_d^{(d)})) &= \prod_{l=1}^{d} |\beta_l| \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \beta_d \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} v_1^{(d)} & \dots & v_d^{(d)} \end{pmatrix} \right|.
\end{aligned}$$

L'ultimo passo è notare che i cambiamenti di parallelogrammi che abbiamo fatto consistono tutti nel sostituire due vettori v_i, v_j coi vettori v_i, $\alpha v_i + v_j$, ma sommare ad una riga un multiplo dell'altra non cambia il determinante, e questo conclude il Teorema. $\square$

4. Cambio di variabili

In una dimensione è molto utile la possibilità di cambiare variabile di integrazione. E' quindi naturale chiedersi se si può fare una cosa simile per integrali in più dimensioni. La risposta è affermativa come spiegato dal prossimo teorema.

Teorema 4.1. *Sia D un dominio regolare e $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Sia $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, invertibile, e sia $\tilde{D}$ un dominio regolare tale che $\psi(\tilde{D}) = D$, allora*

$$\int_D \varphi = \int_{\tilde{D}} \varphi \circ \psi |\det D\psi|$$

Proof. Si ricordi che

$$\int_D \varphi = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d \\ C_{d,1/n}\left(\frac{k}{n}\right)\subset D}} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) n^{-d}.$$

Il primo passo è studiare la forma di $\psi^{-1}(C_{d,1/n}\left(\frac{k}{n}\right))$.

Esercizio 4.2. *Si mostri che, per ogni $\phi \in \mathcal{C}^1$, $z \in \mathbb{R}^d$ e $r \in \mathbb{R}_+$, $\phi(C_{d,r}(z))$ è un dominio regolare.*

Si noti che se $x \in C_{d,r}(z)$, ovvero $\|x - z\|_{\ell^\infty} < r$, allora

$$\left\|\psi^{-1}(z) - \left[\psi^{-1}(x) + D_z\psi^{-1}(z - x)\right]\right\|_{\ell^\infty} \le \|\psi^{-1}\|_{\mathcal{C}^2} r^2.$$

È quindi naturale definire la trasformazione affine $L_z : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ come

$$L_z(v) = \psi^{-1}(x) + D_z\psi^{-1}(z - x).$$

Esercizio 4.3. *Si mostri che esiste $C > 0$ tale che, per ogni $z \in \mathbb{R}^d$ e $r \in (0,1)$,*

$$L_z(C_{d,r-Cr^2}(z)) \subset \psi^{-1}(C_{d,r}(z)) \subset L_z(C_{d,r+Cr^2}(z)).$$

Dall'Esercizio 4.3 e dal Teorema 3.7 segue che, se $r < C^{-1}$,[3]

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Vol}(\psi^{-1}(C_{d,r}(z)))}{\mathrm{Vol}(L_z(C_{d,r-Cr^2}(z))} &\le \frac{\mathrm{Vol}(L_z(C_{d,r-Cr^2}(z))}{\mathrm{Vol}(L_z(C_{d,r-Cr^2}(z))} = \frac{|\det(D_z\psi^{-1})|(r + Cr^2)^d}{|\det(D_z\psi^{-1})|(r - Cr^2)^d} \\ &= \frac{(1 + Cr)^d}{(1 - Cr)^d} \le (1 + Cr)^d(1 + 2Cr)^2 \le e^{3Cr}.\end{aligned}$$

Esercizio 4.4. *Si dimostri che*

$$\frac{\mathrm{Vol}(\psi^{-1}(C_{d,r}(z)))}{\mathrm{Vol}(L_z(C_{d,r+Cr^2}(z))} \ge e^{-3Cr}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\psi^{-1}(C_{d,n^{-1}}(z))) &= \frac{\mathrm{Vol}(\psi^{-1}(C_{d,n^{-1}}(z)))}{\mathrm{Vol}(L_z(C_{d,n^{-1}-Cn^{-2}}(z))} \mathrm{Vol}(L_z(C_{d,n^{-1}-Cn^{-2}}(z)) \\ &\le e^{3Cn^{-1}} |\det(D_z\psi^{-1})| n^{-d}\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\mathrm{Vol}(\psi^{-1}(C_{d,n^{-1}}(z))) \ge e^{-3Cn^{-1}} |\det(D_z\psi^{-1})| n^{-d}.$$

Possiamo quindi scrivere, ponendo $z_k = \phi(n^{-1}k)$, per qualche costante C_1,

$$\left| \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d \\ C_{d,1/n}\left(\frac{k}{n}\right)\subset D}} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) n^{-d} - \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d \\ C_{d,1/n}\left(\frac{k}{n}\right)\subset D}} \varphi\circ\psi(z_k) \frac{\mathrm{Vol}(\psi^{-1}(C_{d,r}(\frac{k}{n})))}{|\det(D_{\frac{k}{n}}\psi^{-1})|} \right| \le C_1 n^{-1}.$$

Per concludere si noti che, per il teorema della funzione inversa,

$$[\det(D_{\frac{k}{n}}\psi^{-1})]^{-1} = \det D_{z_k}\psi.$$

[3]Nella penultima uguaglianza abbiamo usato che, per $x \in (0,1)$, $(1-x)^{-1} \le 1+2x$ e nell'ultima uguaglianza il fatto che $1 + x \le e^x$.

Esercizio 4.5. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ è un dominio regolare di diametro inferiore a r, $g \in \mathcal{C}^1$ e $\bar{x} \in \Omega$ allora*

$$\left| \int_\Omega g(x)dx - g(\bar{x}) \operatorname{Vol}(\Omega) \right| \leq \|g\|_{\mathcal{C}^1} \operatorname{Vol}(\Omega).$$

Ma allora dagli Esercizi 4.2, 4.5 e dal fatto che $\varphi \circ \psi |\det(D\psi)| \in \mathcal{C}^1$ per ipotesi, segue che

$$\left| \varphi \circ \psi(z_k) \frac{\operatorname{Vol}(\psi^{-1}(C_{d,r}(\frac{k}{n})))}{|\det(D_{\frac{k}{n}}\psi^{-1})|} - \int_{\psi^{-1}(C_{d,r}(\frac{k}{n}))} \varphi \circ \psi(x) |\det(D_x \psi)| dx \right| \leq C_2 n^{-d-1}$$

per qualche costante C_2. Ma allora

$$\left| \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ C_{d,1/n}(\frac{k}{n}) \subset D}} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) n^{-d} - \int_{\tilde{D}} \varphi \circ \psi(x) |\det(D_x \psi)| dx \right| \leq C_3 n^{-1}$$

per qualche costante C_3, e questo conclude la dimostrazione prendendo il limite per $n \to \infty$. □

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA (TOR VERGATA), VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 00133 ROMA, ITALY, liverani@mat.uniroma2.it