

II prova di esonero di Fisica Matematica I
Corso di laurea in Matematica
31 maggio 2016

Un sistema meccanico è costituito da un disco, che ha densità di massa omogenea al suo interno, e un punto materiale P . Entrambi, si muovono in un piano **verticale** Oxy . Il disco ha massa M , raggio R e rotola senza strisciare su una guida orizzontale che sta in quiete, in corrispondenza alla retta $y = -h$, con $h \geq 0$. Il punto materiale P ha massa m ed è vincolato in modo tale che rimane costantemente a distanza l dal centro C del disco. Una molla ideale, di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, collega il punto P all'origine O .

Si supponga che i vincoli siano ideali e si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Per semplicità, si ponga $m = l = g = k = 1$ e $M = R = 2$. Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare del solo parametro $h \geq 0$.
- (3) Si consideri ora un sistema meccanico simile a quello descritto inizialmente nel testo, a cui vengono apportate le seguenti variazioni. In primo luogo, si ponga $h = 0$ (ciò significa che la guida orizzontale è ora in corrispondenza all'asse delle ascisse); inoltre, i valori di tutti gli altri parametri sono generici, quindi non si devono considerare fissati come descritto al punto (2); infine, la molla ora collega il punto P alla sua proiezione P_* sull'asse delle ascisse.
 - (3A) Si riscrivano, per il nuovo sistema meccanico, la lagrangiana e le equazioni di Lagrange; si determinino le costanti del moto.
 - (3B) Sempre per esigenze di semplicità, si ponga nuovamente $m = l = g = k = 1$ e $M = R = 2$. Si studi il moto che fa seguito a delle condizioni iniziali tali che il sistema al tempo $t = 0$ è in quiete, con il punto P che inizialmente **non** giace su una retta verticale passante per C . Dopo aver convenientemente formulato una legge di conservazione, che è soddisfatta dal nuovo sistema meccanico e in cui compaiono una sola coordinata e la sua corrispondente velocità generalizzata, si esprima il periodo del moto tramite un opportuno integrale.