TRIGONOMETRIA

CARLANGELO LIVERANI

1. Un problema

Considerate la seguente equazione[1]

$$
\begin{aligned}
&f''(x) = -f(x) \\
&f(0) = 1\,;\ f'(0) = 0.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Subito sorgono alcune domande:

(1) Esistono funzioni che soddisfano (1.1)?
(2) Ne esiste piú di una?
(3) Se esistono, come sono fatte?

Prima di tutto notiamo che se una funzione soddisfa (1.1) allora deve essere due volte derivabile, altrimenti l'equazione non avrebbe senso, ma allora la prima delle (1.1) dice che la derivata seconda è due volte derivabile, dunque la funzione deve essere derivabile un numero arbitrario di volte.

2. Unicità

Il primo risultato è il seguente:

Lemma 2.1. *La sola funzione che soddisfa le condizioni*

$$
\begin{aligned}
&\varphi''(x) = -\varphi(x) \\
&\varphi(0) = 0\,;\ \varphi'(0) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

è la funzione $\varphi \equiv 0$.

Proof. Che la funzione nulla soddisfi le equazioni è ovvio, che sia l'unica dipende dal fatto che

$$
\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)^2 + \varphi'(x)^2\right] = 2\varphi(x)\varphi'(x) + 2\varphi'(x)\varphi''(x) = 0,
\tag{2.2}
$$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo usato la prima delle (2.1). Dunque la funzione $g(x) = \varphi(x)^2 + \varphi'(x)^2$ deve essere costante.[2] Ma $g(0) = 0$, dunque g è identicamente nulla. Ma allora anche φ è identicamente nulla. □

Da questo segue immediatamente l'inicità della soluzione di (1.1). Infatti, se f e g sono due funzioni che soddisfano (1.1) allora $\varphi = f - g$ soddisfa (2.1) e quindi, per il Lemma 2.1, è nulla, dunque $f = g$.

Date: January 8, 2008.

[1] Si noti che la quantità incognita non è un numero, bensí una funzione. Questo tipo di problemi si colloca nell'ambito della teoria delle equazioni differenziali ordinarie, cosa che però non utilizzeremo nella presente discussione.

[2] Infatti se una funzione g ha la prorietà $g' \equiv 0$, allora da Lagrange segue $g(x) = g(0) + g'(z)x$ dove $z \in (0, x)$ ma la derivata è sempre nulla, dunque $g(x) = g(0)$ per ogni x.

3. Alcune proprietà

Data una soluzione di (1.1) se definiamo la funzione $g(x) = f(x)^2 + f'(x)^2$ allora lo stesso conto fatto in (2.2) mostra che g è costante. Ma $g(0) = 1$, dunque

$$f(x)^2 + f'(x)^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Inoltre abbiamo visto che la funzione, se esiste, è derivabile un numero arbitrario di volte, allora si può facilmente verificare, per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,[3]

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \;\; ; \; f^{(2n+1)}(0) = 0.$$

Dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la formula di Taylor implica

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + \frac{f^{(2n+2)}(z)}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{f^{(2n+2)}(z)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

per qualche $z \in (0, x)$. Dunque, ricordando (3.1),

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}. \tag{3.2}$$

Ponendo $n = 2$ si ottiene $f(1) > 0$ e $f(2) < 0$, dunque deve esistere almeno un punto in cui la f si annulla. Sia $x_0 \in [1, 2]$ il punto più piccolo per cui $f(x_0) = 0$.[4]

A questo punto definiamo $f_1(x) = f'(x + x_0)$. Chiaramente $f_1'' = -f_1$ e inoltre $f_1(0) = f'(x_0) = -1$,[5] $f_1'(0) = f''(x_0) = 0$. Questo significa che $-f_1$ soddisfa le condizioni (1.1) e dunque, per l'unicità delle funzioni che soddisfano tali condizioni (se esistono), $-f(x) = f_1(x) = f'(x + x_0)$. Dunque

$$f(x) = -f'(x + x_0) = f''(x + 2x_0) = -f(x + 2x_0)$$

e quindi $f(x) = f(x + 4x_0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, in altre parole f, se esiste, deve essere periodica di periodo $4x_0$.

Esercizio 3.1. *Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $u(x) = f(x+\alpha) - f(x)f(\alpha) + f'(x)f'(\alpha)$ e si mostri che $u \equiv 0$.*

4. Esistenza

La stima (3.2) sembra indicare che un buon candidato per la soluzione di (1.1) è la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}. \tag{4.1}$$

Il criterio del rapporto mostra che la serie di cui sopra è assolutamente convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi definisce una funzione, inoltre chiaramente $f(0) = 1$.

---

[3] Con $f^{(k)}$ si intende la k-pesima derivata di f.

[4] Tale punto esiste perchè, detto $Z := \{z \in [1, 2] \ : \ f(z) = 0\}$ deve esistere $x_0 = \inf Z$. Ma allora esiste una successione $\{z_j\} \subset Z$ tale che $\lim_{j\to\infty} z_j = x_0$ (ovviamente potrebbe essere che alcuni, eventualmente tutti, gli z_j siano uguali) e quindi $f(x_0) = \lim_{j\to\infty} f(z_j) = 0$, per la continuità della f che segue dalla sua derivabilità.

[5] Questo segue da (3.1) e dal fatto che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, x_0]$, per la definizione di x_0, dunque $f''(x) = -f(x) \leq 0$ e $f'(0) = 0$.

Per verificare che sia una soluzione di (1.1) occorre calcolare la derivata di f. Se derivassimo formalmente la serie termine a termine otterremmo la funzione

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1}, \tag{4.2}$$

che anche è ben definita, ma è la derivata?

Lemma 4.1. *Per ogni $x\in\mathbb{R}$ si ha $f'(x)=\phi(x)$.*

Proof. Per dimostrare il Lemma occorre calcolare il rapporto incrementale, ovvero bisogna mostra che

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} h^{-1}&\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x+h)^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}-h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1}\right]\\ &=\lim_{h\to 0} h^{-1}\left[f(x+h)-f(x)-h\phi(x)\right]=0.\end{aligned}$$

Ora la formula di Taylor al secondo ordine implica

$$\frac{1}{(2n)!}(x+h)^{2n}-\frac{1}{(2n)!}x^{2n}-\frac{h}{(2n-1)!}x^{2n-1}=\frac{h^2}{(2n-2)!}z^{2n-2}$$

per qualche $z\in(x,x+h)$. Dunque, ponendo $M=\max\{|x|,|x+h|\}$, si ha

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x+h)^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}-h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|h|^2M^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

Ancora il criterio del rapporto implica che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M^{2n-2}}{(2n-2)!}$ è convergente e dunque esiste una costante $C>0$, indipendente da $|h|<1$ tale che

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x+h)^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}-h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1}\right|\le Ch^2.$$

da cui il Lemma segue immediatamente. □

Ma allora $f'(0)=\phi(0)=0$, inoltre lo stesso tipo di ragionamento appena fatto permette di verificare che

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-2)!}x^{2n-2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=-f(x).$$

Dunque la funzione cercata esiste ed è data dalla formula (4.1).

5. π e il suo valore

Abbiamo perciò risposto alle nostre domande iniziali ma che ha a che fare tutto ciò con la trigonometria? Prima di tutto notate che (3.1) implica che, per ogni $x\in\mathbb{R}$, $(f(x),f'(x))\in\mathbb{R}^2$ appartiene al cerchio unitario (visto che la sua distanza dall'origine è uno). Ora visto che le funzioni sono periodiche di periodo $4x_0$, ne segue che il punto $(f(x),f'(x))$ per $x\in[0,4x_0]$ descrive tutta la circonferenza. Ma allora possiamo adottare il punto di vista di Archimede e decidere che la lunghezza della circonferenza è data dal limite di poligonali con sempre piú lati. Consideriamo per esempio un poligono con n lati i cui vertici si trovano sulla circonferenza e sono dati dai punti $\{(f(4x_0 in^{-1}), f'(4x_0 in^{-1}))\}_{i=0}^{n-1}$. Tale poligono (inscritto nella circonferenza) ha n lati di lunghezza

$$\begin{aligned}\ell_{i,n} &= \sqrt{(f(4x_0(i+1)n^{-1}) - f(4x_0 in^{-1}))^2 + (f'(4x_0(i+1)n^{-1}) - f'(4x_0 in^{-1}))^2}\\ &= \sqrt{(f'(4x_0 in^{-1})^2 n^{-1} + r_i)^2 + (f''(4x_0 in^{-1})n^{-1} + w_i)^2}\end{aligned}$$

dove, avendo usato nuovamente Taylor al secondo ordine, $r_i = \frac{1}{2}f''(z_i)n^{-2}$, $z_i \in (4x_0 in^{-1}, 4x_0(i+1)n^{-1})$ e $w_i = \frac{1}{2}f'''(\zeta_i)n^{-2}$, $\zeta_i \in (4x_0 in^{-1}, 4x_0(i+1)n^{-1})$. Dunque esiste $C > 0$ tale che

$$\left|(f'(4x_0 in^{-1})^2 4x_0 n^{-1} + r_i)^2 + (-f(4x_0 in^{-1})4x_0 n^{-1} + w_i)^2 - 16x_0^2 n^{-2}\right| \leq Cn^{-3}.$$

Per cui,

$$|\ell_{i,n} - 4x_0 n^{-1}| \leq 4x_0 n^{-1}\sqrt{1 + Cn^{-1}} - 4x_0 n^{-1} \leq \frac{4x_0 C}{2n^2}.$$

Ora il perimetro del poligono è dato da $p_n = \sum_{i=0}^{n-1} \ell_{i,n}$ e quindi

$$|p_n - 4x_0| \leq \frac{2x_0 C}{n}.$$

Da ciò segue che $4x_0 = \lim_{n\to\infty} p_n$, cioè (secondo la definizione di Archimede) la lunghezza della circonferenza del cerchio unitario che è comunemente chiamata 2π. In altre parole $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

È dunque ormai chiaro che la funzione che stiamo studiano è una cosa che già conosciamo (anche se solo a livello intuitivo e non rigoroso[6]): il coseno. Infatti la funzione in questione ha tutte le proprietà che considerazioni geometriche intuitive attribuiscono al coseno. Più precisamente

$$\begin{aligned}\cos x &= f(x)\\ \sin x &= -f'(x).\end{aligned}$$

La sola cosa che ancora non è molto soddisfacente è: ma quanto vale π. Dalle considerazioni precedenti risulta solo che $\pi \in (2, 4)$, non molto preciso.[7]

Una prima possibilià è quella di usare (3.2) per stimare x_0. Infatti (3.2) dice che $\cos x = p_n(x) + r_n(x)$ dove p_n è un polinomio di grado $2n$ e $|r_n| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

Ora poichè $|\sin x - x + \frac{x^3}{3!}| \leq \frac{|x|^5}{5!}$ e $x - \frac{x^3}{3!}$ sono un polinomio di terzo grado con massimo al punto $\sqrt{2}$, e valore minimo, nell'intervallo $[1, 2]$, $\frac{5}{6}$ ne segue che, per tutti gli $x \in [1, 2]$,

$$\sin x \geq \frac{5}{6} - \frac{32}{5!} = \frac{17}{30} \geq \frac{1}{2}.$$

Finalmente, se fosse noto un $x_* \in [1, 2]$ tale che $p_n(x_*) = \varepsilon$ allora, sempre per Taylor, ponendo $x_0 - x_* = h$,

$$0 = \cos(x_0) = \cos(x_*) - \sin(z)h = \varepsilon + r_n(x_*) - \sin(z)h$$

[6] Per rendere rigorosa la definizione geometrica del coseno occorre, quanto meno, definire rigorosamente la lunghezza di una curva cosa che abbiamo fatto sopra solo in un caso particolare. Per di più si noti che non abbiamo dimostrato che se approssimiamo la circonferenza con un poligono differente otteniamo lo stesso risultato.

[7] Abbiamo gia fatto di meglio in una lezione precedente ma ora vogliamo argomentare in maniera indipendete.

con $z \in [1,2]$ da cui

$$|h| = \left|\frac{\varepsilon + r_n(x_*)}{\sin z}\right| \leq 2\varepsilon + \frac{2^{2n+3}}{(2n+2)!}.$$

Da cui segue che se possiamo trovare un valore per cui p_n è molto piccolo (per n abbastanza grande) allora possiamo conoscere x_0 con un errore arbitrariamente piccolo.

Per esempio, se scegliamo $n = 5$ allora $\frac{2^{2n+3}}{(2n+2)!} \leq 2 \times 10^{-5}$ quindi se troviamo un $x_* \in [1,2]$ tale che $|p_5(x)| \leq 5 \times 10^{-6}$ allora $|\pi - 2x_*| = 2|x_0 - x_*| \leq 6 \times 10^{-5}$. Ovvero avremmo determinato π con quattro cifre decimali esatte.

Il punto x_* potrebbe essere trovato con venti passi del metodo di bisezione ma questo sarebbe abbastanza laborioso. Vedremo tra poco un metodo molto più efficiente: l'algoritmo di Newton.

6. Altre funzioni trigonometriche

Dalla funzione coseno si ottengono altre funzioni trigonometriche, ad esempio

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Tale funzione è ben definita per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Poichè

$$\frac{d}{dx} \tan x = 1 + \tan x^2 \geq 1$$

la funzione è strettamente monotona crescente e quindi invertibile. Possiamo dunque definire l'arcotangente $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ come la funzione inversa della tangente. Allora, dalla formula per la derivata della funzione inversa segue

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Se $|x| < 1$ possiamo anche scrivere

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}. \tag{6.1}$$

Dalla formula precedente si può facilmente ricavare la serie di Taylor per l'arcotangente.

Lemma 6.1. *Dato $C > 0$, se la serie $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è convergente per $|x| \leq C$ allora la funzione φ è derivabile un numero arbitrario di volte in zero e $\varphi^{(n)}(0) = n! a_n$.*

Proof. Cominciamo col notare che per la condizione sufficiente della convergenza di una serie deve essere $\lim_{n\to\infty} a_n C^n = 0$. Dunque se $|x| \leq C/2$ si ha (di nuovo per Taylor al secondo ordine)

$$\left|\varphi(x+h) - \varphi(x) - h\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}\right| \leq h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n n(n-1)C^{n-2} 2^{-n+2}\right|$$
$$\leq h^2 C^2 \sum_{n=2}^{\infty} n^2 2^{-n}.$$

L'ultima serie è convergente (come si può verificare usando il criterio del rapporto) e non dipende da x. Da questo segue che

$$\varphi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Poichè la derivata si scrive nuovamente come una serie convergente dello stesso tipo possiamo nuovamente applicare lo stesso ragionamento e ottenere il risultato voluto per induzione. □

Esercizio 6.2. *Si usi la formula* (6.1) *il Lemma 6.1 e la formula di Taylor, per ottenere la rappresentazione, per* $x \in [-1, 1]$*,*

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

La formula di cui sopra è interessante e può essere usata per calcolare π. Per esempio, $\tan \pi/4 = 1$, quindi

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

che da il fatto che $\pi/4$ è la somma degli inversi dei numeri dispari a segni alterni. Tale formula è piuttosto sorprendente ma non molto utile per calcolare π.[8]

D'altro canto $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, quindi

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.$$

Questa serie converge molto più rapidamente e per ottenere quattro cifre esatte basta calcolare i primi otto termini (a patto di conoscere $\sqrt{3}$ con una precisione di cinque cifre cosa facilmente ottenibile con l'algoritmo di Newton che vedremo tra breve).

Dipartimento di Matematica, Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy, liverani@mat.uniroma2.it

[8]Se si considera la dimostrazione della convergenza delle serie a segni alterni i vedrà che per calcolare π con 4 cifre decimali esatte con tale formula occorre sommare circa 10^4 termini.