# ALGORITMO DI NEWTON

CARLANGELO LIVERANI

## 1. Il problema

Si consideri il problema di trovare le soluzioni dell'equazione

$$f(x) = 0$$

in un dato intervallo $[a, b]$. Si supponga che $f$ sia derivabile due volte e che esista $M > 0$ tale che $\sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq M$. Inoltre si assuma che $f(a)f(b) < 0$, dunque esiste uno zero in $(a, b)$ per il teorema degli zeri delle funzioni continue e $f'(x) \geq c > 0$ per ogni $x \in [a, b]$, dunque lo zero è unico.

## 2. L'idea

L'idea di Newton è di confondere la funzione con la tangente. Più precisamente, scegliamo un punto iniziale (per esempio $x_0 = \frac{a+b}{2}$) e consideriamo la tangente

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

questa intersecherà l'asse delle $x$ nel punto

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Se la tangente è veramente vicina alla funzione, allora ci dovremmo aspettare che $x_1$ sia più vicina allo zero di $f$ di quanto non lo fosse $x_0$. In particolare, se per caso $f(x_0) = 0$ allora si ottiene $x_1 = x_0$.

Viene dunque naturale considerare l'algoritmo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

per ogni $n \geq 0$.

## 3. Funziona?

Per vedere se l'idea funziona confrontiamo $f(x_n)$ con $f(x_{n+1})$.

$$\begin{aligned}
f(x_{n+1}) &= f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x_{n+1} - x_n)^2 \\
&= f(x_n) - f'(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{1}{2} f''(\xi)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} f''(\xi)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2
\end{aligned}$$

Dunque

$$|f(x_{n+1})| \leq \frac{M}{2c^2}|f(x_n)|^2.$$

*Date*: Rome, December 27, 2007.

Dunque, se $|f(x_0)| < \sigma \frac{2c^2}{M}$ per qualche $\sigma < 1$, ne seque, per induzione, che per ogni $n > 0$

$$|f(x_n)| \leq \left[\frac{M}{2c^2}\right]^{1+\cdots+2^{n-1}} |f(x_0)|^{2^n} < \sigma^{2^n}.$$

e dunque l'algoritmo di Netwon produce punti in cui la funzione ha valori sempre più piccoli. Inoltre se $f(x_0) \leq \sqrt{\frac{(a+b)c^2}{M}}$ si ha che $x_1 \in [a, b]$ e così per i punti successivi.

D'altro canto, detto $z \in (a, b)$ il misterioso punto in cui $f(z) = 0$ si ha

$$f(x_n) = f(z) + f'(\xi)(x_n - z) = f'(\xi)(x_n - z),$$

da cui seque

$$|x_n - z| \leq \frac{|f(x_n)|}{|f'(\xi)|} \leq \frac{|f(x_n)|}{c}.$$

Dunque $x_n$ convege a $z$ e la convergenza, una volta che $f(x_n)$ è sufficientemente piccolo, è estremamente rapida.

Dipartimento di Matematica, Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy, liverani@mat.uniroma2.it