Analisi Matematica I

INFORMATICA

Secondo Appello

Martedì 26-02-08

1. Si consideri una funzione derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(0) = 1$ e, per ogni $x \in [0, 1]$,
$$0 \leq f'(x) \leq f(x).$$
Si mostri che $f(1/2) \leq 2$.

2. Si determini il dominio naturale di definizione e si tracci il grafico della funzione $f(x) = x \ln x$.

3. Data una funzione derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ e $\sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ si definisca la successione $x_0 = 0$ e $x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si studi l'esistenza del limite
$$\lim_{n\to\infty} x_n.$$

4. Si discuta per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$
è convergente. Detto $A \subset \mathbb{R}$ l'insieme dei punti per cui la serie converge si definisca la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ come $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Si mostri che $1/2 \in A$, che f è derivabile in $1/2$ e si calcoli $f'(1/2)$.

5. Si studi la convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{n!}.$$

Avete 2:30 ore di tempo. Ogni esercizio vale otto punti. Il punteggio finale si ottiene con la formula: punteggio totale degli esercizi meno due. La sufficienza si ottiene con un punteggio ≥ 18. Solo le risposte **chiaramente giustificate** *saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera* **disordinata** *o* **incomprensibile** *saranno* **ignorate**.