Analisi Matematica I
Correzione Secondo Esonero–16-01-2007

1. La funzione ha un asintoto verticale in -1 e da $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ segue che ha un massimo (negativo) in -3 e un minimo (positivo) in 1.

2. Applicando la formula di Taylor al terzo ordine segue

   $$f(n+1) = f(n) + \left[-\frac{1}{2n} + \ln n\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n}\right] + \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2}\right]$$

   dove $z \in (n, n+1)$. Dunque

   $$|f(n+1) - f(n) - \ln n| \leq \frac{1}{12n^2}.$$

   Dunque la serie è convergente per il teorema del confronto.

   $$\begin{aligned} n! &= e^{\sum_{k=1}^{n} \ln n} = e^{\sum_{k=1}^{n} f(k+1) - f(k) + \mathcal{O}(\frac{1}{12n^2})} \\ &= e^{f(n+1) - f(1) + \mathcal{O}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{12n^2})} \end{aligned}$$

   Da cui segue il risultato.

3. Il succo è che la f deve essere decrescente e siccome $f(0) = 0$ allora è negativa per $x > 0$. Tuttavia è necessario trasformare questo argomento impressionistico in uno rigoroso. Questo può essere fatto in vari modi, ecco il più semplice che mi viene in mente.

   Si consideri l'intervallo $[0, 1]$ e sia a il punto in cui f assume il valore massimo. Allora, se $a \neq 0$, esiste $z \in (0, a)$ tale che $f(a) = f(0) + f'(z)a < f(z)a \leq f(a)a$, da cui segue $f(a) < 0$, ma questo è impossibile visto che $f(0) = 0$ dunque il massimo si ha in zero e $f'(x) < 0$ per ogni $x \in [0, 1]$, dunque è decrescente e $f(x) < 0$ in $(0, 1]$. Ora supponiamo che $x > 1$ sia il più piccolo x per cui $f'(x) \geq 0$. Visto che fino ad x la f è decrescente, segue $f'(x) < f(x) \leq f(0) = 0$, che è una contraddizione. Dunque la funzione è sempre decrescente.

4. Si possono usare varie strategie (bisezione, frazioni continue, Taylor, Newton). La più rapida è l'ultima che, applicata alla funzione $f(x) = x^3 - 2$, da:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{2}{3}\frac{x_n^3 + 1}{x_n^2}$$

partendo da $x_0 = 1$ si ottiene $x_2 = \frac{91}{72}$. Il problema è stimare l'errore. Questo si può fare semplicemente notando che

$$f(x) = f(x) - f(2^{\frac{1}{3}}) = f'(z)(x - 2^{\frac{1}{3}})$$

dunque, per $x \in [1, 2]$,

$$|x - 2^{\frac{1}{3}}| \leq \frac{|f(x)|}{f'(1)} = \frac{|f(x)|}{3}.$$

Con un minimo di pazienza si calcola $|f(x_2)| \leq 0.02$ da cui segue $|x_2 - 2^{\frac{1}{3}}| \leq 10^{-2}$.

5. Usando il rapporto o la radice si vede che la serie converge per $|x| < 1$. Per la derivata basta calcolare il rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} h^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 h^n = \lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 h^{n-1} \\ &= 1 + \lim_{h\to 0} \sum_{n=2}^{\infty} n^2 h^{n-1} = 1 + \lim_{h\to 0} h \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)^2 h^n = 1. \end{aligned}$$

Poichè l'ultima serie è convergente e, per ogni $h \leq \frac{1}{2}$, sempre minore di $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)^2 2^{-n}$.