Analisi Matematica I
Correzione Primo Esonero, 28-11-06

1. Per confrontare i due numeri sarebbe buono avere la stessa base, ora $8 \cdot \sqrt{2} > 8 \cdot 1.4 > 11$ dunque $2^{\frac{7}{2}} > 10$ quindi $2^{105} > 10^{105\frac{2}{7}} = 10^{30}$.

2. Si noti che se $x > 0$ allora $f(x) > 0$, dunque la f è ben definita da $\mathbb{R}_+$ a $\mathbb{R}_+$. Inoltre
$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{4x+1}+1} \leq x.$$
Dunque la successione x_n è monotona decrescente e limitata inferiormente, dunque ha limite x_*. Visto che la f è continua, ne segue che
$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_*).$$
Ma l'equazione $f(x) = x$ ha $x = 0$ come unica soluzione, dunque $x_* = 0$.

3. Si scriva
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} \left(\sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 = 1$$
a causa del limite notevole $\lim_{x\to 0} x^{-1} \sin x = 1$.

4. Il massimo comune divisore è uno come si vede da una banale applicazione dell'algoritmo euclideo.

5. Poichè
$$|\ln \cos n^{-1}| \leq |1 - \cos n^{-1}| = \frac{(\sin n^{-1})^2}{1 + \cos n^{-1}} \leq n^{-2}$$
ne segue che la serie è assolutamente convergente.