

Analisi Matematica I

Correzione Secondo Appello–20-02-2007

1. Si noti che $(1 + \frac{1}{n})^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}$. Sviluppando il logaritmo con la formula di Taylor al secondo ordine si ha $\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2(1+z)^2 n^2}$ per qualche $z \in (0, 1)$. Dunque

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{1 - \frac{1}{2(1+z)^2 n}} = e - e^\xi \frac{1}{2(1+z)^2 n}$$

dove abbiamo usato Lagrange e quindi $\xi \in (0, 1)$. Quindi

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| \leq \frac{e}{2n} \leq \frac{5}{n}.$$

2. Sia M il massimo di $|f|$ (che esiste visto che $|f|$ è derivabile e quindi continua). Se $M = 0$ l'asserto è dimostrato, se $M > 0$ allora sia $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ tale che $|f(x_0)| = M$. Assumiamo $f(x_0) = M$, il caso $f(x_0) = -M$ si può discutere esattamente nello stesso modo. Per Lagrange $f(x_0) = f(0) + f'(z)(x_0 - 0)$ dunque $f(x_0) = f(z)x_0 \leq \frac{1}{2}f(x_0)$ che implica $f(x_0) = 0$.
3. Poichè $x^2 + f(x)^2 = 1$, stiamo semplicemente considerando una semicirconferenza.
4. Utilizzando Lagrange si può confrontare la serie con la serie armonica generalizzata $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$.
5. Basta utilizzare la formula di Taylor per la tangente al terzo ordine (infatti si può vedere che il resto del terzo ordine è più piccolo di 10^{-2}).