Analisi Matematica I

Correzione Primo Appello–02-02-2007

1. Visto che $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ il dominio è $[-2, \infty)$. Il grafico è banale meno in un punto: 1. Infatti in 1 il grafico ha uno spigolo del tipo $|x-1|$.

2. Se si considera $b_n = \ln a_n$ allora si ha $b_0 = 0$ e $b_{n+1} = b_n + \ln(1 + n^{-2})$, iterando e usando le solite stime sulla differenza tra x e $\ln(1+x)$ segue

$$b_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 + n^{-2}) = \sum_{k=1}^{n-1} n^{-2} + \mathcal{O}(n^{-3}).$$

Dunque la successione b_n converge e quindi anche la a_n poichè l'esponenziale è una funzione continua.

Per i curiosi, il limite si puó calcolare esattamente. Infatti il limite si può scrivere come $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + n^{-2})$. Inoltre esiste la seguente simpatica formula (dovuta ad Eulero)

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

dunque

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + n^{-2}) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}.$$

3. La formula di Taylor implica

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^n \cos z}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Prendendo il limite per $n \to \infty$ si ha

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Da cui la prima dell'esercizio. Per la seconda, si supponga che $\sin 1 = \frac{p}{q}$, allora

$$\frac{1}{2(2q+1)!} \leq \left| \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{1}{(2q+1)!}.$$

Ora l'espressione al centro si può scrivere come una frazione con denominatore $(2q-1)!$ e, siccome è diversa da zero, non può essere più piccola di $\frac{1}{(2q+1)!}$.

4. La derivata di $f(x) := x^{20} - 5x^2 + 1$ è $20x^{19} - 10x$ e dunque si annulla solo per $x \in \{0, 2^{-\frac{1}{18}}\}$. A zero la funzione ha un massimo, dunque in $2^{-\frac{1}{18}} \leq 1$ ha un minimo. D'altro canto $f(0) = 1$ e $f(1) = -3$ dunque la funzione scende fino ad avere valori negativi e quindi risale ma non raggiunge valori positivi nell'intervallo in considerazione. Dunque in $[0,1]$ f si annulla una volta sola.

5. Dallo sviluppo di Taylor di $\sin x$ segue

$$\lim_{n\to\infty} \left[n^2 - n^3 \sin\frac{1}{n} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3!} + \mathcal{O}(n^{-2}) = \frac{1}{6}.$$