ALCUNI PROBLEMI NON BANALI CONCERNENTI I LIMITI

CARLANGELO LIVERANI

1. Quanto spesso vi pagano gli interessi?

Supponiamo di avere un capitale di $a > 0$ euro e di metterlo in una banca che ci paga il due per cento annuo su base annua. Questo significa che, dopo un anno, il nostro capitale sarà $a + 2a/100 = a(1 + 1/50)$. A questo punto riceviamo una pubblicità di un'altra banca che ci offre lo stesso tasso di interesse ma che lo paga su di una base semestrale. Ciò significa che dopo sei mesi paga mezzo tasso annuale, dunque dopo sei mesi il nostro capitale sarà $a + a/100$ e dopo altri sei mesi ci vene pagato l'interesse su questo capitale, dunque dopo un anno avremo

$$\left(a + \frac{a}{100}\right) + \frac{1}{100}\left(a + \frac{a}{100}\right) = a\left(1 + \frac{1}{100}\right)^2.$$

Per esempio, se il nostro capitale iniziale è di 10000 euro ($a = 10000$), allora nel primo caso dopo un anno abbiamo 10200 euro, nel secondo 10201 euro. Insomma, non molto di più ma comunque di più. Stiamo per trasferire i nostri fondi in tale banca quando veniamo a sapere che un'altra banca paga gli intreressi su base quadrimestrale, cioè tre volte all'anno. Un rapido calcolo ci fa vedere che in questo caso alla fine di un anno il nostro capitale sarebbe

$$a\left(1 + \frac{1}{150}\right)^3.$$

Dunqe, se $a = 10000$ si ottiene10201.33 (arrotondato al centesimo), ancora un poco di più che nel caso presedente. Saputo ciò cadiamo vittima dell'avidità e ci chiediamo che succederebbe se ci pagassero gli interessi n volte all'anno. Chiaramente dopo un anno avremmo

$$a\left(1 + \frac{1}{50n}\right)^n. \tag{1.1}$$

Che succede a questa successione, cresce arbitrariamente oppure, purtroppo, è limitata?

Per capirlo partiamo da un caso più semplice, ovvero dallo studio della successione[1]

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{1.2}$$

Date: November 6, 2006.

[1] Poichè si può scrivere $(1 + \frac{1}{50n})^n = \left[(1 + \frac{1}{50n})^{50n}\right]^{\frac{1}{50}}$, è chiaro che si comprende l'andamento della successione (1.2) allora si comprende anche quello della (1.1).

Per studiare la successione $\{a_n\}$ è conveniente riscriverla in maniera opportuna applicando il binomio di Newton.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} n^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!\, n^k}.$$

Poichè nell'ultima frazione ci sono k termini al numeratore si può dividere ognuno di essi per n e questo equivale a dividere numeratore e denominarote per n^k. Dunque

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1 \cdot (1-\frac{1}{n}) \cdots (1-\frac{k-1}{n})}{k!} \tag{1.3}$$

La formula (1.3) può sembrare più complicata della formula (1.2) ma permette di ottenere immediatamente due informazioni fondamentali sulla successone altrimenti non facilmente otenibili.

Lemma 1.1. *Per ogni $n \in \mathbb{N}_*$ $a_n \leq 3$.*

Proof. Da (1.3) segue

$$a_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

visto che moltiplicare m numeri tutti più grandi di due da ovviamente un numero più grande di quello che si ottiene moltiplicando due m volte. Ci siamo perciò ridotti a calcolare l'ultima sommatoria. Per farlo esiste un simpatico trucco algebrico: per ogni $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}_*$ si ha[2]

$$(1-b)\sum_{k=0}^{n} b^k = 1 - b^{n+1}.$$

Dunque $\sum_{k=0}^{n} b^k = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}$. Usando tale formula per $b = \frac{1}{2}$ si ha

$$a_n \leq 1 + \frac{1-2^{-n-1}}{1-2^{-1}} \leq 1 + \frac{1}{1-2^{-1}} = 3.$$

$\square$

Lemma 1.2. *La successione $\{a_n\}$ è monotona crescente.*

Proof. Usando ancora (1.3) si ha

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1 \cdot (1-\frac{1}{n+1}) \cdots (1-\frac{k-1}{n+1})}{k!} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1 \cdot (1-\frac{1}{n}) \cdots (1-\frac{k-1}{n})}{k!} = a_n.$$

$\square$

Dunque la successione (1.1) è monotona crescente e limitata e quindi ammette limite, chiamiamo e tale limite. Notare che, sebbene abbiamo stabilito la sua esistenza, non sappiamo un gran chè sul numero e, solo che $a_1 = 2 \leq e \leq 3$.

A questo punto possiamo tornare alla nostra successione originaria

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{50n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{50n}\right)^{50n}\right]^{\frac{1}{50}} = e^{\frac{1}{50}}.$$

[2]Verificate questa formula è un utile esercizio.

Si può calcolare che $ae^{\frac{1}{50}}$ è circa uguale a 10202, dunque la differenza tra pagare gli interessi annualmente e pagarli in maniera continua è di circa due euro all'anno su 10000 euro. Non molto per il singolo cliente[3] ma non trascurabile per una banca che abbia molti clienti e con depositi ben più sostanziosi.

Per calcolare più precisamente il valore di e ci si può avvalere ancora una volta della formula (1.3). Per ogni $m \in \mathbb{N}_*$ definiamo

$$b_{m,n} := \sum_{k=0}^{m} \frac{(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}.$$

La ragione per fare ciò dipende dalla seguente stima

$$|a_n - b_{m,n}| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{2^{-k+m+1}}{(m+1)!} \leq \frac{2}{(m+1)!}.$$

Dunque

$$|e - \lim_{n\to\infty} b_{m,n}| = |\lim_{n\to\infty}(a_n - b_{m,n})| \leq \lim_{n\to\infty} |a_n - b_{m,n}| \leq \frac{2}{(m+1)!}.$$

Per di più

$$\lim_{n\to\infty} b_{m,n} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$$

questo significa che

$$e = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} b_{m,n} = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \tag{1.4}$$

L'ultima espressione si chiama una *serie* e è semplicemente un limite di somme, ne parleremo più ampiamente in seguito. Per di più le stime precedenti mostrano che se vogliamo conoscere e con una precisione di un millesimo basta calcolare i primi sette termini della serie, si ottiene così.[4]

$$0 \leq e - 2.718 \leq 10^{-3}.$$

2. L'area del cerchio

In questa sezione cercheremo di calcolare l'area del cerchio seguendo una vecchia idea di Archimede (III secolo avanti Cristo).

Si consideri un cerchio di raggio r, chiaramente la sua area è più grande di quella di un qualunque poligono inscritto e più piccola di quella di un qualunque poligono circoscritto. Ispirandoci ad Archimede considereremo solo poligoni regolari con n lati. Si veda in figura 1 uno spicchio di poligono inscritto e circoscritto di angolo 2α, cioè con π/α lati (ovviamente supponendo π/α intero). Vediamo l'area del poligono inscritto. Se il poligono ha n lati allora $\alpha = \pi/n$. L'area del mezzo spicchio circoscritto in figura è $r^2/2 \cdot \sin\alpha\cos\alpha = r^2/4 \cdot \sin 2\alpha$. Chiamando $A_{i,n}$ l'area del poligono inscritto di n lati abbiamo perciò

$$A_{i,n} = r^2 \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

[3]Però in trenta anni (la durata di certi mutui) fa una differenza di circa cento euro, cioè l'un per cento del capitale iniziale.

[4]Il lettore che ha voglia di fare alcuni calcoli numerici può facilmente ottenere stime migliori calcolando più termini.

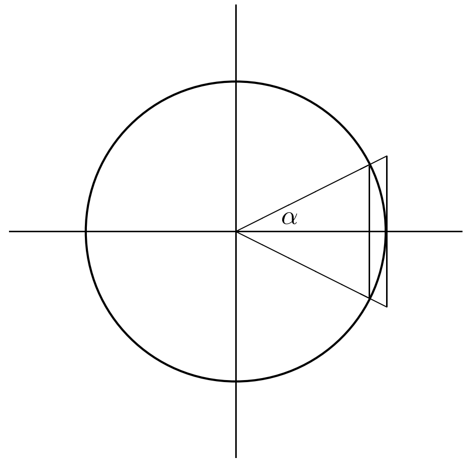

FIGURE 1. Uno spicchio di poligono inscritto e di poligono circoscritto

Analogamente l'area del poligono circoscritto $A_{c,n}$ è data da

$$A_{c,n} = r^2 n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Chiaramente, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$A_{i,n} \leq A_c \leq A_{c,n} \tag{2.1}$$

dove A_c è l'area della circonferenza (sempre che a tale quantità si possa attribuire un senso).

Studiamo cosa succede alle espressioni di cui sopra quando n tende all'infinito. Dalla figura 1 è evidente che per ogni angolo α si ha $\sin\alpha \leq \alpha \leq \tan\alpha$, poichè $r\alpha$ è la lunghezza dell'arco. Da questo segue $\alpha\cos\alpha \leq \sin\alpha \leq \alpha$ ovvero

$$\cos\alpha \leq \frac{\sin\alpha}{\alpha} \leq 1. \tag{2.2}$$

Ponendo $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ in (2.2) otteniamo

$$\cos\frac{2\pi}{n} \leq \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} \leq 1$$

ovvero

$$\pi r^2 \cos\frac{2\pi}{n} \leq A_{i,n} \leq \pi r^2.$$

Visto che $\lim_{n\to\infty} \cos\frac{2\pi}{n} = 1$, ne segue, per il confronto, che $\lim_{n\to\infty} A_{i,n} = \pi r^2$.

Analogamente, da (2.2),

$$1 \leq \frac{\tan\alpha}{\alpha} \leq \frac{1}{\cos\alpha}$$

e, allo stesso modo che sopra, $\lim_{n\to\infty} A_{c,n} = \pi r^2$.

Finalmente, prendendo il limite per n che va all'infinito nella (2.1) si ottiene la ben nota formula:

$$A_c = \pi r^2.$$

Notare che tutto si basa sul limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

la cui validità è sopra dimostrata.

3. IL LOGARITMO

L'utilità del logaritmo nasce dalla sua caratteristica di trasformare prodotti in somme facilitando in tal modo calcoli complessi.[5] Vediamo come nasce una tale funzione.

Supponiamo di cercare una funzione $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che abbia la magica proprietà

$$\ell(ab) = \ell(a) + \ell(b), \tag{3.1}$$

esiste una tale funzione e se si come è fatta?

Prima di tutto notiamo che per ogni numero $a \in \mathbb{R}$, dovrebbe essere

$$\ell(0) = \ell(0 \cdot a) = \ell(0) + \ell(a)$$

ma questo implicherebbe $\ell(a) = 0$ sempre, una funzione non molto interessante! Rassegnamoci dunque al fatto che una tale funzione non può essere definita in 0. Limitamoci a cercare $\ell : \mathbb{R}^+ \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ con la proprietà (3.1).

$$\ell(1) = \ell(1 \cdot 1) = 2\ell(1)$$

dunque deve essere $\ell(1) = 0$. D'altro canto

$$\ell(a^p) = p\ell(a)$$

e

$$0 = \ell(1) = \ell(aa^{-1}) = \ell(a) + \ell(a^{-1})$$

dunque $\ell(a^{-1}) = -\ell(a)$. Infine,

$$\ell(a) = \ell(a^{\frac{q}{q}}) = q\ell(a^{\frac{1}{q}})$$

cioè $\ell(a^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q}\ell(a)$. In conclusione abbiamo che, per ogni numero $b \in \mathbb{Q}$ si ha

$$\ell(a^b) = b\ell(a). \tag{3.2}$$

Questa proprietà è ovviamente molto conveniente per calcolare potenze e radici di numeri. se $\bar{a} \in \mathbb{R}^+$ è tale $\ell(\bar{a}) = 1$ allora la (3.2) diventa $\ell(\bar{a}^b) = b$; cioè sui razionali ℓ è l'inverso della elevazione a potenza. Inoltre è chiaro che se una funzione ℓ soddisfa (3.1) allora anche la funzione $\lambda\ell$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ soddisferà (3.1).

Questo ci da una buona idea delle proprietà di ℓ ma la domanda rimane: esiste una tale funzione sui reali con la magica proprietà (3.1)?

Per rispondere a questa ultima domanda è possibile ragionare in diversi modi. Il modo sotto riportato è interessante per il suo particolare sapore geometrico.

Purtroppo è necessario iniziare con una piccola digressione.

Per ogni $a \in \mathbb{R}^+$ si consideri la trasformazione del piano $T_a(x, y) := (ax, a^{-1}y)$. Se prendiamo il quadrato $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2], y \in [0, 1]\}$ allora T_aQ è il rettangolo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, 2a], y \in [0, a^{-1}]\}$, si veda la figura 2 per un esempio della azione di T_a nel caso $a = 2$.

La cosa interessante delle trasformazioni T_a è che l'immagine di un rettangolo è un rettangolo e che l'area del rettangolo immagine è uguale all'area del rettangolo originario (uno nell'esempio in figura). Sembra quindi naturale che questa

[5] Con l'avvento dei calcolatori questo aspetto dei logaritmi ha perso di importanza ma non per questo l'utilità dei logaritmi è venuta a cessare.

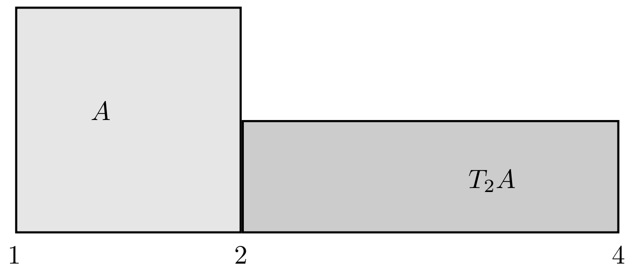

FIGURE 2. Azione di T_2.

proprietà di conservare le aree valga per qualunque (ragionevole) regione del piano. Assumiamolo e vediamo che ne segue.[6]

Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ per $x > 0$, si tratta di una iperbole. Si definisca la funzione $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ nel modo seguente: se $z \geq 1$ allora $\ln(z)$ è uguale all'area della regione $P(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, z]; 0 \leq y \leq 1/x\}$. Per esempio l'area della regione grigio chiaro nella figura 3 è il valore di $\ln(2)$. Se invece $z < 1$ allora $\ln(z)$ è uguale all'area della regione $P(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [z, 1]; 0 \leq y \leq 1/x\}$ presa col segno negativo. Chiaramente $\ln(z)$ è una funzione ben definita (almeno dal punto di vista geometrico).

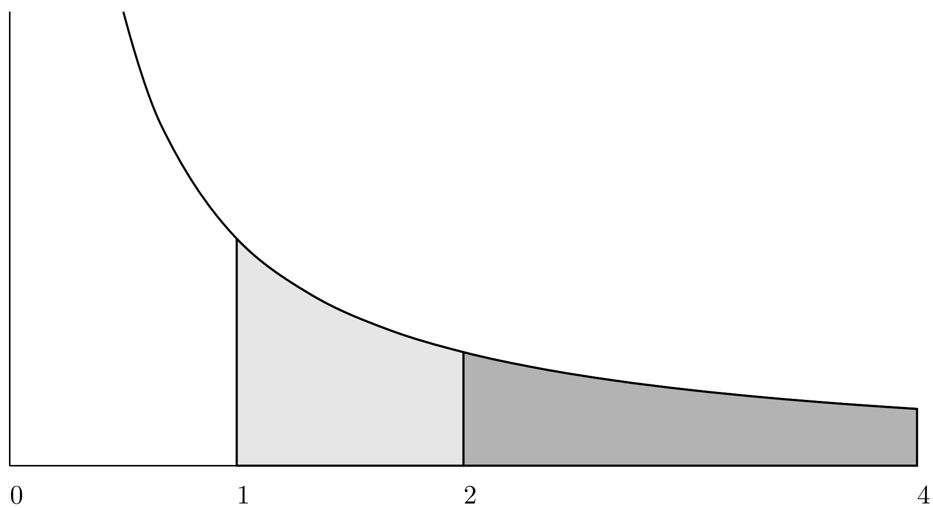

FIGURE 3. Grafico di $f(x) = 1/x$

Vediamo che succede applicando la trasformazione T_a alla regione $P(z)$. Se $y \geq 0$ allora $a^{-1}y \geq 0$ inoltre se $y \leq 1/x$ allora $a^{-1}y \leq a^{-1}/x = 1/(ax)$. Ciò significa che se un punto appartine all'iperbole anche il punto immagine apparterrà all'iperbole, mentre se un punto si trova sotto l'iperbole allora anche il punto immagine giace sotto l'iperbole, dunque $T_aP(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, za]; 0 \leq y \leq 1/x\}$.

[6]Il problema chiaramente è che non abbiamo ancora definito l'area di una figura *qualsiasi* e dunque non è ben chiaro come calcolarne algebricamente il valore, tuttavia il suo significato geometrico–intuitivo dovrebbe essere chiaro.

Nella figura 3 si vede la regione $T_a P(z)$, nel caso speciale in cui $z = 2$ ed $a = 2$, ombreggiata in grigio scuro.

Da quanto detto segue che $P(a) \cup T_a P(b) = P(ab)$ (nel caso in figura $P(2) \cup T_2 P(2) = P(4)$). Ma questo significa

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

cioè la funzione ln ha la proprietà (3.1)! Dunque tali funzioni esistono, ma siamo in grado di calcolarne i valori?

Chiaramente ln è crescente ed illimitata, dunque è ragionevole assumere che esista un numero reale e tale che $\ln(e) = 1$, vediamone comunque una dimostrazione rigorosa basta su di un modo di ragionare che ci dovrebbe essere ormai familiare.

Lemma 3.1. *Existe un numero $e \in \mathbb{R}$ tale che* $\ln(e) = 1$.

Proof. Prima di tutto vediamo che esiste un munero a_1 tale che $\ln(a_1) > 1$. Poichè dalla figura 3 è ovvio $\ln 2 > 0$ ne segue che $\ln 2^n = n \ln 2 > 1$ a patto che n sia sufficientemente grande (più grande di $(\ln 2)^{-1}$ per la precisione). Abbiamo perciò che nell'intervallo $[1, a_1]$ la funzione ln cresce da 0 ad un valore maggiore di 1. Dividiamo l'intervallo a metà (sia a_2 il punto medio) se $\ln a_2 = 1$ abbiamo trovato il numero che cercavamo, se $\ln a_2 < 1$ allora consideriamo l'intevallo $[a_2, a_1]$; se invece $\ln a_2 > 1$ allora consideramo l'intervallo $[1, a_2]$. In entrambi i casi abbiamo un intervallo di lunghezza $(a_1 - 1)/2$ in cui ln vale meno di uno nell'estremo di sinistra e vale più di uno sull'estremo di destra (come sull'intervallo originario). Ora dividiamo nuovamente l'intervallo a metà, chiamiamo a_3 il punto medio, e ragionando come sopra otteniamo un nuovo intervallo, questa volta di lunghezza $(a_1 - 1)/4$, tale che ln vale meno di uno nell'estremo di sinistra e vale più di uno sull'estremo di destra (a meno che a_3 non sia il numero cercato).

A questo punto possiamo iterare questa procedura quante volte vogliamo e, se non troviamo prima il numero voluto, otteniamo una successione $\{a_n\}$, chiaramente tale successione è di Cauchy, sia e il suo limite. Per costruzione

$$|e - a_n| \leq \frac{a_1 - 1}{2^{n-1}}.$$

Rimane da investigare che succede alla successione $\{\ln a_n\}$. Se $a > b > 1$ allora $\ln a - \ln b \leq b^{-1}(a - b)$, questo perchè $\ln a - \ln b$ è semplicemente l'area sotto l'perbole nell'intervallo $[b, a]$ mentre $b^{-1}(a - b)$ è l'area di un rettangolo di base $[b, a]$ e altezza b^{-1} che ovviamente contiene l'area precedente (si veda la figura 4). Dunque si ha $|\ln a_n - \ln e| \leq |e - a_m| \leq (a_1 - 1)2^{-n+1}$, perciò $\ln e = \lim_{n\to\infty} a_n$. Ma $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ per costruzione e questo conclude il Lemma. Infatti, la successione $\{\ln a_n\}$ è l'unione di due sottosuccessioni: quella degli a_n che sono il limite sinistro di uno degli intervalli che abbiamo costruito iterativamente e quella degli a_n che sono un limite destro. Queste due sottosuccessioni devono avere lo stesso limite della successione $\ln a_n$ ma una deve avere limite minore od uguale ad uno e l'altra maggiore o uguale a uno, per il modo con cui sono stati costruiti gli intervalli. Dunque l'unica possibilità è che il limite sia uno.

□

Dunque il numero e esiste, ma di che numero si tratta?

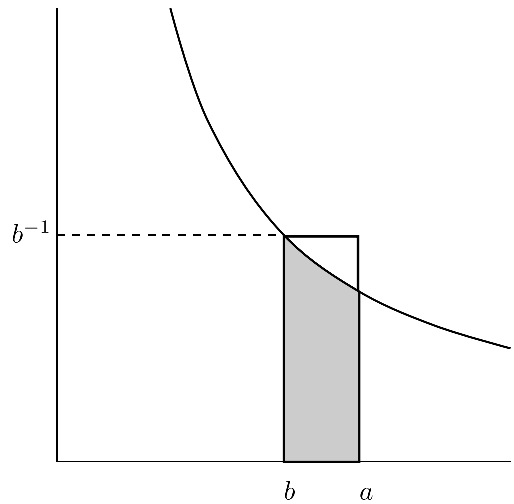

FIGURE 4. Come stimare l'area sotto l'iperbole

Consideriamo $\ln(1+1/n)$, chiaramente

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}. \tag{3.3}$$

Infatti guradando alla figura 5, si vede che la prima quantità è l'area del rettangolo grigio scuro, la seconda (in grigio) è l'area sotto l'iperbole (che definisce ln) e la terza è l'area del rettango più alto (in grigio chiaro).

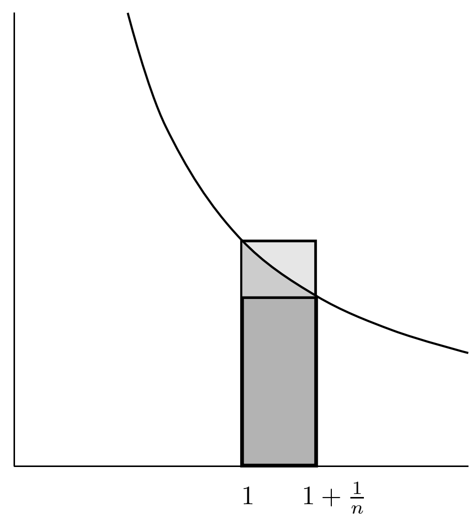

FIGURE 5. Aree rilevanti per l'equazione (3.3)

Dalla (3.3) e dalle proprietà di ln segue che

$$1 \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{e che} \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leq 1. \tag{3.4}$$

Poichè la funzione ln è crescente

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{3.5}$$

Vediamo dunque che e non era un nome casuale, si tratta infatti della nostra vecchia conoscenza (si veda la prima sezione di queste note). D'altro canto le (3.4) implicano

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{e}{n}$$

e da questo segue una dimostrazione alternativa del limite notevole

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Dipartimento di Matematica, Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy, liverani@mat.uniroma2.it