NUMERI RAZIONALI E REALI

CARLANGELO LIVERANI

1. Numeri Razionali

Tutti sanno che i numeri razionali sono numeri del tipo $\frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N}_*$. Purtuttavia molte frazioni possono corrispondere allo stesso numero, per esempio $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$. È quindi un problema interessante quello di trovare una rappresentazione univoca dei numeri razionali. Un classico risultato in questa direzione è costituito dal segente Lemma.

Lemma 1.1. *Ogni numero razionale ha una unica rappresentazione del tipo $\frac{p}{q}$ con p e q primi fra loro.*

Proof. Supponiamo per assurdo che

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$$

con $q < q'$ e p, q e p', q' rispettivamente primi tra loro. Moltiplicando si ottiene $pq' = qp'$. Ma allora qp' è divisibile per q', *poichè q' non puó dividere p' allora deve dividere q.* Cioè deve esistere $c \in \mathbb{N}$ tale che $q = cq'$. ma allora $cp' = p$, cioè c divide p, dunque q e p sono entranbi divisibili per c contrariamente all'ipotesi. □

L'attento lettore si sarà probabilmente reso conto che la frase in italico nella dimostrazione del Lemma 1.1, sebbene in prima lettura sembri molto ragionevole, non è proprio cosí ovvia, infatti non lo è per nulla. Tuttavia è vera, ma per dimostrarlo occorre un poco di lavoro supplementare.

Definitione 1.2. *Dati $p, q \in \mathbb{N}$ diciamo che p* è divisibile per *q e scriviamo $q|p$ se esiste $c \in \mathbb{N}$ tale che $p = cq$.*

Lemma 1.3. *Se $p \in \mathbb{N}$ è primo e se , dati due numeri $a, b \in \mathbb{N}$, $p|ab$ allora o $p|a$ oppure $p|b$.*

Proof. Chiaramente è sempre possibile trovare $m, n, a_1, b_1 \in \mathbb{N}$, $a_1, b_1 < p$, tali che

$$\begin{aligned} a &= pn + a_1 \\ b &= pm + b_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Il Lemma afferma che o a_1 oppure b_1 devono essere nulli, cioè $a_1 b_1 = 0$. Per dimostrare che deve essere così ragioniamo per assurdo. Supponiamo che $a_1 b_1 \neq 0$, allora (1) implica $ab = p^2 nm + pmaa_1 + pnb_1 + a_1 b_1$, da cui segue che $p|a_1 b_1$. Il Lemma è dunque equivalente a dire che per ogni p primo non esistono $a, b < p$ tali che $p|ab$.

Se $p = 2$ il risultato è ovvio, dunque il Lemma è vero per alcuni numeri primi. Ragioniamo nuovamente per assurdo e supponiamo che esista qualche numero primo

Date: Rome, October 11, 2003.

per cui il Lemma è falso. Sia p' il più piccolo di tali numeri primi. Dunque esisteranno $a, b \in \mathbb{N}$, $a, b < p'$ tali che $p'|ab$. Ora sia $c \in \mathbb{N}$ tale che $ab = cp'$, chiaramente $c < p'$. Dunque $c|ab$ e qualunque numero primo che divida c dividerà anche ab. Ne segue che o a oppure b è divisibile per tale numero primo (poichè esso è necessariamente più piccolo di p' e dunque è, per costruzione, uno dei numeri primi per cui il Lemma è noto essere vero). Otterremo perciò numeri a_1, b_1, c_1 tali che $a_1 b_1 = c_1 p'$. Continuando in questa maniera possiamo dividere per un divisore primo di c_1 ottenendo a_2, b_2, c_2 per cui $a_2 b_2 = c_2 p'$ e così via fino a che otteniamo $a_n b_n = p'$ (cioè $c_n = 1$). Ma questa ultima uguaglianza è impossibile poichè contraddice l'ipotesi che p' è primo. □

Lemma 1.4. *Ogni numero intero $a \in \mathbb{N}$ ha una unica espressione della forma $a = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$ dove $\{p_i\}$ sono numeri primi e $\{k_i\}$ sono interi.*

Proof. Supponiamo che esistano due tali decomposizioni $a = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$ e $a = q_1^{j_1} \cdots q_n^{j_m}$. Supponiamo inoltre che esista $q_i \notin \{p_1, \dots, p_n\}$, allora $q_i | p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$ ma se applichiamo il Lemma 1.3 ripetutamente otteniamo che q_i deve dividere uno dei $\{p_i\}$ cosa assurda perchè essi sono primi. Dunque $\{q_i\} = \{p_i\}$. La sola possibilità che rimane è che $\{k_i\} \neq \{j_i\}$ ma dividendo opportunamente ci si riconduce immediatamente al caso precedente. □

Con alle spalle Lemma 1.3 e Lemma 1.4 è ora facile convincersi che la frase in italico nella dimostrazione del Lemma 1.1 è corretta, lascio i dettagli come utile esercizio al lettore.

2. Algoritmo Euclideo e frazioni continue

Il problema aperto dalla sezione predente è quello di ridurre una frazione alla sua forma standard, ovvero *trovare il massimo comun divisore tra due numeri dati*. Questo problema ha una elegante soluzione conosciuta come *algoritmo Euclideo*.

Siano $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, allora esiste $a_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$p = a_1 q + p_1, \quad p_1 < q \tag{2}$$

e

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{p_1}}$$

se q e p_1 hanno un divisore comune (chiamiamolo b) allora anche $b|p$ (da (2)) e quindi b è divisore comune di p, q. D'altro canto se $b|p$ e $b|q$ allora $b|p_1$ (questa è ancora una volta conseguenza di (2)). Dunque p, q hanno gli stessi divisori comuni di q, p_1 e quindi lo stesso massimo comun divisore. Poichè

$$q = a_2 p_1 + q_1, \quad q_1 < p_1$$

possiamo scrivere

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{p_1}{q_1}}}$$

dove q_1, p_1 hanno gli stessi divisori comuni di q, p_1 e quindi anche di p, q. Questa procedura può essere iterata fino a che non si ottiene un resto nullo. Per esempio se $q_{n-1} = a_{2n} p_n$, cioè $q_n = 0$, allora q_{n-1} e p_n sono entrambi divisibili per p_n e quindi p_n (l'ultimo resto non nullo) è il massimo comun divisore.

Per di più abbiamo ottenuto un'altra maniera univoca di scrivere una frazione chiamata *frazione continua*:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{2n}}}$$

Esempio 2.1. *Si trovi il massimo comun divisore tra* $p = 107779$ *e* $q = 26123$.

$$\begin{aligned} 107779 &= 4 \cdot 26123 + 3287 \\ 26123 &= 7 \cdot 3287 + 3114 \\ 3287 &= 1 \cdot 3114 + 173 \\ 3114 &= 18 \cdot 173. \end{aligned}$$

Dunque il massimo comun divisore è 173 *e si ha la seguente rappresentazione in frazione continua.*

$$\frac{107779}{26123} = 4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{18}}}$$

3. I Numeri Razionali non bastano

Allo stesso modo in cui i numeri razionali devono essere introdotti per attribuire un risultato ad ogni divisione, i numeri irrazionali emergono naturalmente nello studio della operazione inversa della potenza: l'estrazione di radice. Il caso più semplice che si puo considerare è il seguente: esiste un numero a tale che $a^2 = 2$? (Stiamo parlando di $\sqrt{2}$.)

Lemma 3.1. *Non esiste alcun numero razionale tale che il suo quadrato sia 2.*

Proof. Supponiamo che esistano $p, q \in \mathbb{N}$, primi tra loro, tali che

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Allora $p^2 = 2q^2$ e, per il Lemma 1.3, $2|p$. Dunque, $p = 2p_1$ e quindi $4p_1^2 = 2q^2$ che implica $q^2 = 2p_1^2$. Ma allora, sempre per il Lemma 1.3, $2|q$ cosa che contraddice l'ipotesi che p, q siano primi tra loro.[1] □

La cosa è seccante ma, come premio di consolazione, esistono numeri razionali molto vicini a quello voluto.

[1]Ci si può chiedere se non esista una dimostrazione che non utilizzi il Lemma 1.3 visto che, dopo tutto, ci interessa solo la fattorizzazione rispetto a due. In effetti, si può agomentare come segue: o p è divisibile per due oppure lo è $p+1$ (infatti, se $p = 2a+1$ allora $p+1 = 2(a+1)$). Dunque $2q^2 + p = p^2 + p$ implica

$$q^2 + \frac{p}{2} = \frac{p(p+1)}{2},$$

cioè $2|p$. Da qui segue

$$\left(\frac{q}{p_1}\right)^2 = 2$$

dove $p = 2p_1$. Abbiamo dunque una nuova frazione (con numeratore e denominatore più piccoli) che ha 2 come quadrato. Ovviamente possiamo reiterare questo ragionamento fino a che non arriviamo ad una rappresentazione con denominatore uno, un numero intero! Poichè $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$, è ovvio che non esiste alcun numero intero il cui quadrato sia due e questo conclude la dimostrazione alternativa in cui non si è usato il Lemma 1.3 nè il fatto che p, q fossero primi tra loro.

Lemma 3.2. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un numero razionale $a \in \mathbb{Q}$ tale che*

$$|a^2 - 2| \leq \frac{1}{n}.$$

Proof. Sia $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$, chiaramente $a_0^2 < 2$ e $a_1^2 > 2$. Consideriamo il punto intermedio $a_2 = \frac{a_0+a_1}{2} = \frac{3}{2}$, risulta che $a_2^2 > 2$. Allora $2 \in [a_0^2, a_2^2]$. Possiamo nuovamente considerare il punto intermedio $a_3 = \frac{a_0+a_2}{2} = \frac{5}{4}$ e verificare se a_3^2 è maggiore o minore di due (accade che $a_3^2 < 2$). Possiamo dunque dire che 2 è contenuto nell'intervallo più stretto $[a_3^2, a_2^2]$. Si può continuare nello stesso modo quante volte si vuole (diciamo m volte) ottenedo cosi $2 \in [a_k^2, a_j^2]$ con $|a_k^2 - a_j^2| \leq 2^{-m+2}$. Basta dunque che $2^{m-2} > n$ per dimostrare il Lemma. □

Una cosa interessante della dimostrazione del Lemma precedente è che si tratta di una dimostrazione costruttiva, cioè viene specificata una procedura esplicita per costruire i numeri richiesti. Vediamo un poco meglio che succede: $a_4 = \frac{11}{8}$, $a_5 = \frac{23}{16}$, $a_6 = \frac{45}{32}$, $a_7 = \frac{91}{64}$, $a_8 = \frac{181}{128}$, $a_9 = \frac{363}{256}$, $a_{10} = \frac{725}{512}$, $a_{11} = \frac{1449}{1024}$. Per cui risulta che $2 \in [a_8^2, a_{11}^2]$ quindi qualunque significato si voglia dare a $\sqrt{2}$ deve essere un oggetto nell'intervallo $[\frac{1448}{1024}, \frac{1449}{1024}]$, poichè l'intervallo ha lunghezza $\frac{1}{1024}$ sembra invitabile affermare che le prime cifre di $\sqrt{2}$ dovranno essere 1.414 oppure 1.415.

Tuttavia la procedura specificata non è nè l'unica nè la più efficiente. Nuovamente ci troviamo davanti ad una ambiguità. Ciononostante, se numeri diversi soddisfano alle ipotesi del Lemma 3.2 allora devono essere molto vicini tra loro.

Lemma 3.3. *Se $a, b \in \mathbb{Q}$ sono tali che $|a^2 - 2| \leq \frac{1}{n}$ e $|b^2 - 2| \leq \frac{1}{n}$, per qualche $n \in \mathbb{N}$, allora*

$$|a - b| \leq \frac{1}{n}.$$

Proof. Si noti che

$$|a^2 - b^2| \leq |a^2 - 2| + |b^2 - 2| \leq \frac{2}{n}.$$

Per di piú $a^2 - 2 \geq -1/n \geq -1$ implica $a^2 \geq 1$, cioè $a, b > 1$. Dunque $|a^2 - b^2| = (a + b)|a - b| \geq 2|a - b|$. Collezionando le precedenti disuguaglianze abbiamo $|a - b| \leq \frac{1}{n}$. □

Per quanto detto prima è interessante vedere una dimostrazione alternativa del Lemma 3.2. Per costruire un'altra successione di numeri con la proprietà desiderata applichiamo formalmente l' algoritmo Euclideo al misterioso numero $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{1} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Iterando la equazione (3) si ottiene

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

e, usando nuovamente (3),

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}}$$

Le formule precedenti suggeriscono un nuovo modo di costruire una sequenza di numeri il cui quadrato si avvicini sempre più a 2. Uno sarebbe tentato di scrivere ceh $\sqrt{2}$ si puo esprimere come

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

Nel seguito cercheremo di rendere rigorosa e chiarificare tale intuizione.

La formula (3) suggerisce di definite la funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$$f(x) := 1 + \frac{1}{1+x}. \tag{4}$$

Studiamo le proprietà della funzione f.

Prima di tutto notiamo che

$$f(x)^2 = 1 + \frac{3+2x}{1+2x+x^2}.$$

Da questa formula segue immediatamente che se $x^2 > 2$ allora $f(x)^2 < 2$ e se $x^2 < 2$ allora $f(x)^2 > 2$. Inoltre

$$\begin{aligned} f(1) =& \frac{3}{2} < 2 \\ f(2) =& \frac{4}{3} > 1. \end{aligned}$$

Infine la funzione f inverte l'ordine, cioè se $0 < x < y$ allora

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1+x} > 1 + \frac{1}{1+y} = f(y).$$

Tutto cio significa che $f([1,2]) \subset [1,2]$ e che se noi prendiamo un qualunque numero $a \in [1,2]$ allora $f(a)$, $f^2(a) = f(f(a))$, $f^3(a) = f(f(f(a)))$ sono tutti numeri nell'intervallo $[1,2]$. Per di più continuano a saltare a destra ed a sinistra di $\sqrt{2}$. La domanda che rimane è se questi numeri si avvicinano a $\sqrt{2}$ oppure no.

Siano $x, y \in [1,2]$ allora

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \leq \frac{|x-y|}{4}.$$

Dunque $f^1([1,2])$ è un intervallo di lunghezza minore di $1/4$ (infatti ha lunghezza $1/6$); $f^2([1,2])$ è un intervallo di lunghezza minore di 4^{-2} e $f^n([1,2])$ è un intervallo di lunghezza monore di 4^{-n}. D'altro canto se $a < b$ sono gli estremi dell'intervallo $f^n([1,2])$ allora deve essere $a^2 < 2$ e $b^2 > 2$. Questo dimostra che scegliendo, per esempio, $a_0 = \frac{3}{2}$, $a_{n+1} = f(a_n)$ si ottiene un'altra successione del tipo richiesto dal Lemma 3.2, solo questa volta la rapidità con cui si raggiunge una data precisione è

almeno doppia. Per esempio

$$a_1 = f(a_0) = f(\frac{3}{2}) = 1 + \frac{1}{1+\frac{3}{2}} = \frac{7}{5}$$
$$a_2 = f(a_2) = f(7/5) = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}$$
$$a_3 = \frac{41}{29}\,; \quad a_4 = \frac{99}{70}\,; \quad a_5 = \frac{239}{169}\,; \quad a_6 = \frac{577}{408}\,; \quad a_7 = \frac{1393}{985}$$

e così via. Si noti che $2 \in [a_7^2, a_6^2]$, quindi qualunque cosa vorremmo chiamare $\sqrt{2}$ dovrebbe comunque stare nell'intervallo $[\frac{1393}{985}, \frac{577}{408}]$, e dunque in $[1.414213, 1.414216]$. I quadrati dei numeri nell' intervallo cadono tutti in $[1.999999, 2.000006]$. Dunque abbiamo trovato dei numeri razionali il cui quadrato è 2 a meno di un milionesimo! Si noti che abbiamo ottenuto una precisione mille volte superiore al metodo di bisezione con poco più della metà dei passi. Abbiamo dunque una nuova, più efficiente, dimostrazione del Lemma 3.2.

Concludendo tutta questa discussione, siamo arrivati alla comprensione del fatto che $\sqrt{2}$ è un *numero* ben definito, infatti si può parlare senza ambiguità della sua n-esima cifra decimale. Tuttavia risulta che $\sqrt{2}$ è definibile solo attraverso una procedura di approssimazione che ci permetta di calcolarne *tante cifre quante vogliamo* (almeno in linea di principio). Queste procedure di approssimazione non sono uniche (ne abbiamo viste due differenti ma ne esistono infinite altre) ma sono tutte equivalenti, nel senso che stabilita la precisione richiesta danno tutti numeri che differiscono tra di loro per un errore inferiore alla quantità specificata. Queste procedure di approssimazione sono formalizzate nel concetto di *limite* di cui discuteremo tra poco. L'insieme dei *numeri* definibili attraverso tali procedure è detto *insieme dei numeri reali* (in simboli $\mathbb{R}$) e i numeri reali ma non razionali ($\{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$) sono detti *numeri irraziomali*.

4. Numeri Irrazionali

Nella sezione precedente abbiamo visto che $\sqrt{2}$ può essere *approssimato con precisone arbitraria*. Questo concetto è formalizzato in maniera precisa nella seguente definizione di limite.

Definitione 4.1. *Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si dice che il limite di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è b, e si scrive $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar n \in \mathbb{N}$ tale che*

$$|a_n - b| \le \varepsilon \quad \textit{per ogni } n \ge \bar n.$$

Per esempio è facile verificare che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. La cosa seccante della definizione precedente è che richiede l'esistenza del numero b e quindi non si può applicare alla nostra precedente discussione, sebbene da essa siamo convinti che $\sqrt{2}$ è un numero ben definito. Come abbiamo già detto questa convinzione deriva dal fatto che possiamo calcolarne quante cifre vogliamo. Anche questa proprietà può essere formalizzata rigorosamente nel concetto di *successioni di Cauchy*.

Definitione 4.2. *Si dice che una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar n \in N$ tale che*

$$|a_n - a_m| \le \varepsilon \quad \textit{per ogni } n, m \ge \bar n.$$

Chiaramente le successioni che abbiamo trovato in relazione a $\sqrt{2}$ sono Cauchy.

È facile verificare che se una successione di numeri razionali ha limite allora è di Cauchy mentre, come abbiamo visto, il contrario non è necessariamente vero.

A questo punto possiamo aggiungere tutte le radici quadrate ai numeri razionali ed ottenere un insieme di numeri in cui si può sempre fare l'operazione di radice quadrata. Ma che dire delle radici cubiche? Il processo di allargamento dei numeri sembra non avere fine e apparentemente ci servono sempre più numeri man mano che consideriamo nuove operazioni, la situazione è alquanto intollerabile. D'altro canto la nostra discussione di $\sqrt{2}$ ci ha insegnato che si puo aggiungere un numero solo se questo è conoscibile con precisione arbitraria, altrimenti non si sa di che si sta parlando. Ciò significa che la soluzione del problema dell'allargamento dei numeri deve risiedere nella richiesta che *ogni successione di Cauchy abbia limite*. Il modo ovvio di fare ciò è di dire che i numeri sono appunto tali successioni di Cauchy. Ovviamente diverse successioni di Cauchy possono dare luogo allo stesso numero (lo abbiamo visto per $\sqrt{2}$) ma questo non ci può spaventare più di tanto visto che è una situazione che si è già presentata con i numeri razionali rappresentati come frazioni. Tuttavia questa ambiguità per i numeri razionali ha dato luogo a parecchie riflessioni per convincersi che era innoqua.[2] Non può dunque sorprendere che per rendere precisa l'idea di completamento di cui sopra siano necessarie parecchie riflessioni che tuttavia esulano dallo scopo del presente corso in cui ci accontenteremo della precedente idea intuiva di *numero reale*.

Si noti comunque che le varie proprietà dei limiti (e.g. il limite della somma è la somma dei limiti, lo stesso per il prodotto, sottrazione, etc.) ci dicono esattamente che la nostra estensione dei numeri è consistente: poichè i numeri reali sono essenzialmente definiti come limiti, il fatto che le operazioni sui limiti siano quelle ovvie ci dice che i numeri reali si sommano, moltiplicano, dividono etc. rispettando le proprietà già note per i numeri razionali.

4.1. **Esercizi.**

(1) Sia $a_0 = 1$, $a_1 = 1,3$, $a_2 = 1,33$, $a_3 = 1,333$, $a_4 = 1,3333$, $a_5 = 1,33333$ e così via. Si dimostri che
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}.$$
(2) Sia $a_0 = 0$, $a_1 = 0,9$, $a_2 = 0,99$, $a_3 = 0,999$, $a_4 = 0,9999$, e così via. Si dimostri che
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Dipartimento di Matematica, Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy, liverani@mat.uniroma2.it

[2]Prima di tutto si deve chiarire quando due frazioni rappresentano lo stesso numero. In analogia occorre chiarire quando due successioni di Cauchy rappresentano lo stesso numero: ovviamente $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ rappresentano lo stesso numero se e solo se $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.