Analisi Matematica I

Correzione Secondo Esonero–17-01-2006

1. Si tratta di un polinomio che, per x grandi assume valori grandi e positivi.

$$f'(x) = 2x(3x^4 - 10x^2 + 2)$$

dunque si ha un punto critico a zero e gli altri risolvono $3x^4 - 10x^2 + 2 = 0$. Ponendo $x^2 = z$ si ha

$$z_{\pm} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{19}}{3}.$$

Abbiamo perciò due punti critici positivi e due negativi, simmetrici. Inoltre i punti sono uno minore di uno e uno maggiore. D'altro canto $f(0) = 1$, $f(1) = -1$. Dunque il grafico ha un minimo in zero, massimi in $\pm\sqrt{z_-}$, poi un minimo in $\pm\sqrt{z_+}$, quindi cresce verso $+\infty$. Siccome $f(1) = f(-1) < 0$ i minimi in $\pm\sqrt{z_+}$ devono essere negativi. Dunque $f(x) = 0$ ha quattro soluzioni di cui una in $(-1, 0)$ e una in $(0, 1)$.

2. Per la formula di Taylor

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{e^{\xi}}{6}z^3.$$

Usando tale formula con $z = \frac{x^2}{1+x}$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x^2}{1+x}} - 1 - x^2 + x^3}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{1+x} + \frac{1}{2}x^4 - x^2 + x^3}{x^4} \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^2 + x^3 - x^3 + x^4}{x^4(1+x)} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

3. La serie è chiaramente una serie geometrica di ragione $-x^2$. Dunque converge per $|-x^2| < 1$, cioè per $|x| < 1$. Quando converge vale la ben nota formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \leq 1.$$

4. Poichè il codominio è $[0, 1]$, ne segue che $0 \leq f(x) \leq 1$ per ogni $x \in [0, 1]$. Se definiamo la funzione $g(x) := f(x) - x$ abbiamo che g è una funzione continua tale che $g(0) \geq 0$ e $g(1) \leq 0$. Ma allora il teorema degli zeri per le funzioni continue ci assicura che esiste $x_* \in [0, 1]$ tale che $g(x_*) = 0$, cioè $f(x_*) = x_*$.
5. La funzione diventa la funzione di cui all'esercizio uno ponendo $x = z^2$, dunque già sappiamo che ha uno zero nell'intervallo considerato. (Comunque visto che $f(0) = 1 > 0$ e $f(1) = -1 < 0$, la cosa segue anche dal teorema citato all'esercizio 4). Siccome quello che ci vien chiesto è di trovare uno zero con una alta precisione è opportuno usare lo strumento più potente a nostra disposizione per fare tali cose: l'algoritmo di Newton.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Visto che $f'(0) = 2$ che punta nella direzione sbagliata (infatti sappiamo che vicino a zero c'è un massimo), mentre $f'(1) = -5$, che va nella direzione giusta, sembra ragionevole partire con $x_0 = 1$. Dunque $f(x_0) = -1$ mentre $f'(x_0) = -5$ e $x_1 = \frac{4}{5}$. Da cui $f(x_1) = -\frac{11}{125}$. Poichè $f'(x_1) = -\frac{102}{25}$, abbiamo $x_2 = \frac{397}{510} = \frac{4}{5} - \frac{11}{510}$. Dunque

$$\begin{aligned} f(x_2) &= \left(\frac{4}{5} - \frac{11}{510}\right)^2 \left[\frac{4}{5} - \frac{11}{510} - 5\right] + \frac{794}{510} + 1 \\ &= -\left(\frac{16}{25} - \frac{8}{5} \frac{11}{510} + \left(\frac{11}{510}\right)^2\right) \left(\frac{21}{5} + \frac{11}{510}\right) + \frac{794}{510} + 1 \\ &= -\frac{1672}{125 \cdot 102} + \frac{152 \cdot 11}{125 \cdot 102} - \frac{13}{5} \left(\frac{11}{510}\right)^2 - \left(\frac{11}{510}\right)^3 \\ &= -\frac{161777}{510^3} \sim -10^{-3}. \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto la precisione voluta con soli due passi di Newton.