Esame di Analisi I del 04-09-2006
Soluzioni

1. Esercizio 1

Ci sono molti modi di risolvere questo esercizio ma si basano tutti sulla formula di Taylor per il logaritmo nel punto uno. L'ordine necessario dipende da quanto si è furbi. Proviamo col secondo ordine:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2\xi^2}x^2$$

per qualche $\xi \in (1, 1+x)$. Dunque ponendo $x = 1$ si ottinene $\ln 2 = 1$ con un errore negativo e più piccolo di .5. Questo significa che $\ln 2$ potrebbe essere anche .5 da cui un errore del 100%, chiaramente non ci siamo.

A questo punto si puo insistere e usare il terzo ordine:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3\xi^3}x^3.$$

Ponendo nuovamente $x = 1$ e poichè l'errore (positivo questa volta) più grande si ottiene con $\xi = 1$, si ha la stima $\frac{1}{2}$ con un errore inferiore a $1/3$. Questo significa un errore di circa il 66%, ancora non ci siamo. Si puo continuare ad usare ordini più grandi ma la cosa si prospetta abbastanza noiosa, in alternativa si potrebbe cercare di applicare la formula ad un x più piccolo. Questa è la cosa che si può fare in molti modi, vi do due possibilità

$$\ln 2 = 2\ln\sqrt{2}\,; \quad \ln 2 = \ln(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3}) = \ln(1+\frac{1}{2}) + \ln(1+\frac{1}{3}).$$

La seconda formula mi sembra meglio in questo caso perchè mi risparmia di fare una radice a mano. Applicando la formula al secondo ordine si ha

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \mathit{errore}$$

dove $\mathit{errore} \leq \frac{13}{72}$, da cui un errore percentuale inferiore al $\frac{13}{47}\% \leq 28\%$, problema risolto!

2. Esercizio 2

La funzione ha gli stessi massimi e minimi del seno, solo è schiacciata a zero dall'esponenziale. Non mi pare ci sia molto altro da dire.

3. Esercizio 3

Ancora Taylor: se x è piccolo si ha[1]

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

da cui

$$\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4).$$

[1] Con $\mathcal{O}(x^n)$ si intende un errore dell'ordine di grandezza di x^n.

Questo significa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2}n^{-2} + \mathcal{O}(n^{-4})$$

chiaramente la seriere è convergente. Al contrario,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} -n^{-1} + \mathcal{O}(n^{-2})$$

diverge.

4. Esercizio 4

Il problema è risolvere l'equazione

$$\sin\frac{1}{x} = -x$$

Il membro di destra ha un mucchio di oscillazioni tra uno e meno uno man mano che ci si avvicina a zero, poiché il membro di sinistra è sempre compreso tra 0 e -1 ne segue che ad ogni oscillazione ci sono due soluzioni. Basta quindi calcolare il numero di oscillazioni nell'intervallo dato. Chiaramente sono circa $\frac{1000}{2\pi}$ (più o meno un paio), lascio a voi contarle esattamente.

5. Esercizio 5

Di nuovo la mitica serie di Taylor ci dice che

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + \mathcal{O}(n^{-5})$$

da cui, sostituendo, segue immediatamente che il limite è un sesto.