Esame di Analisi I del 20-2-2006
Soluzioni

1. Esercizio 1

Poichè $0 \leq \frac{n!}{n^{n^2}} \leq \frac{n^n}{n^{n^2}} = n^{n-n^2}$ il limite è chiaramente zero.

2. Esercizio 2

Visto che $f'(x) = 4x^3 - 2x$, la derivata si annulla per $x \in \{0, \pm\sqrt{1/2}\}$. Inoltre $f(0) = 0$ è chiaramente un massimo locale. Dunque il grafico è una doppia buca.

La seconda domanda chiede di determianre il numero di soluzioni dell'equazione $x^4 - x^2 - x = a$ al variare di $a \in [-1, 1]$. Per fare questo è utile conoscere il grafico della funzione $g(x) = x^4 - x^2 - x$. Poichè $g'(x) = 4x^3 - 2x - 1$ occorre lavorare un poco per capire come sono fatti gli zeri di tale polinomio. A questo scopo studiamo la funzione g'. La sua derivata è $g''(x) = 12x^2 - 2$ che si annulla per $x \in \{\pm\sqrt{1/6}\}$. Visto che $g'(\sqrt{1/6}) < 0$ ne segue che la cubica ha il massimo locale inferiore a zero e dunque interseca l'asse solo una volta per valori positivi di x. Visto che $g'(1) = 1 > 0$ ne segue che l'unico zero di g' è situato nell'intervallo $(0, 1)$. Dunque g ha un solo punto critico e questo è un minimo locale (quindi ha l'aspetto di una parabola distorta). Visto che $g(1) = -1$ ne segue che il minimo è inferiore a -1. Ovviamente questo significa che il numero di soluzioni di $g(x) = a$, per $a \in [-1, 1]$ è sempre due.

3. Esercizio 3

Si noti che se $x \in [0, 1]$ allora $f(x) \in [0, 1]$, dunque $\{x_n\} \subset [0, 1]$. Inoltre la formula di Taylor per il seno implica, per $z \in [0, \pi/2]$,

$$\sin z = z - \frac{\cos\xi}{3!} z^3 \leq z.$$

Dunque $f(x) \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}x < x$, cioè $x_{n+1} < x_n$. Dunque abbiamo una successione decrescente inferiormente limitata, quindi ha limite. Detto x_* tale limite si ha

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = f(x_*).$$

Visto che l'unica soluzione dell'equazione $f(x) = x$ in $[0, 1]$ è $x = 0$, ne segue $x_* = 0$.

4. Esercizio 4

La disequazione in questione è equivalente a $2abcd \leq a^2d^2 + c^2b^2$, che è equivalente a $0 \leq (ad - cb)^2$ che è ovviamente sempre verificata.

5. Esercizio 5

Dato $x > 0$, la formula di Taylor al quinto ordine è

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos\xi}{120} x^5,$$

per qualche $\xi \in (0, x)$.

Visto che
$$\left|\frac{\cos\xi}{120}2^{-5}\right| \le \frac{1}{120}2^{-5} = \frac{1}{3840},$$
ne segue che $\sin 1/2$ è uguale a $\frac{23}{48}$ con un errore inferiore ad un millesimo.