

Analisi Matematica I

Correzione Primo Appello–24-01-2006

1. si veda la soluzione del primo esercizio del terzo appello dell'anno 2001-2002.
2. Poichè $f(0) = 1$ e $f'(x) = x^2(4x - 27)$ si ha che la funzione ha un flesso orizzontale in zero ed un minimo in $\frac{27}{4}$. Inoltre il minimo è inferiore a -1 , dunque si hanno due soluzioni della equazione $f(x) + 1 = 0$.
3. Visto che $x_0 \in (0, 1)$ ne segue che $x_n \in (0, 1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, inoltre $x_{n+1} = x_n - x_n^2 < x_n$. Dunque abbiamo una successione monotona decrescente limitata dal basso, dunque esisterà il limite $x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. D'altro canto la f è continua e dunque

$$x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_*)$$

E' immediato vedere che l'unico numero che soddisfa tale equazione è $x_* = 0$.

4. si veda la soluzione del terzo esercizio del terzo appello dell'anno 2001-2002.
5. Siamo interessati a e^z e $\cos z$ per z piccolo. Usando la formula di Taylor al terzo e quarto ordine si ottiene $e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \mathcal{O}(z^3)$ e $\cos z = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \mathcal{O}(z^4)$, dunque

$$e^{-\frac{1}{n}} - \cos \sqrt{\frac{2}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + \mathcal{O}(n^{-2}) - 1 + \frac{1}{n} + \mathcal{O}(n^{-2}) = \mathcal{O}(n^{-2})$$

dunque stiamo sommando termini che sono minori di una costante per n^{-2} che è una ben nota serie convergente, dunque la serie converge.