

Analisi Matematica I

INFORMATICA

Primo Appello–Martedì 24-01-2006

1. Dire, senza usare il calcolatore, quale dei seguenti numeri è il maggiore

$$2^{10!}; \quad 1000000^{200}; \quad (1000!)^2,$$

e lo si giustifichi.

2. Si tracci il grafico della funzione

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 1.$$

Si dica quante soluzioni ha l'equazione $f(x) + 1 = 0$.

3. Si consideri la funzione $f(x) := x - x^2$ e la successione definita da $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si studi il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

4. Mostrare che, per ogni $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, vale la disuguaglianza

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{q!q},$$

e che, se $q > 3$, $p \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{p}{q} - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} \right| \geq \frac{1}{q!}.$$

Si usino queste due disuguaglianze per dimostrare che $e \notin \mathbb{Q}$.

5. Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{n}} - \cos \sqrt{\frac{2}{n}} \right).$$

Avete 2:30 ore di tempo. Ogni esercizio vale otto punti. Il punteggio finale si ottiene con la formula: punteggio totale degli esercizi meno due. La sufficienza si ottiene con un punteggio ≥ 18 . Solo le risposte chiaramente giustificate saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera disordinata o incomprensibile saranno ignorati.