Analisi Matematica I
Correzione Primo Esonero

1. Si ottiene
$$\ln(x+1)^2 \geq \ln(2|x|+1)$$
e, poichè il logaritmo è una funzione crescente, tale disuguaglianza è equivalente a
$$x^2 + 2x + 1 \geq 2|x| + 1.$$
Ora occorre dividere in due possibilità: se $x \geq 0$ si ha $x^2 \geq 0$ che è sempre verificata. Se $x < 0$ allora
$$0 \leq x^2 + 4x = x(x+4),$$
e quindi $x + 4 \leq 0$, cioè $x \leq -4$. La soluzione è dunque $x \in (-\infty, -4] \cup [0, \infty)$.

2. Si noti che $x_1 = f(x_0) = f(1) = 0$ e $f(0) = 0$, dunque $x_2 = 0$ e, in generale, $x_n = 0 \leq (n+1)^{-1}$. Se pensate che questo esercizio è veramente cretino, questo è dovuto al fatto che ho sbagliato nello scivere il testo: quello che volevo scrivere era $x_1 = \frac{1}{2}$ invece di $x_0 = 1$.

   In tal caso la soluzione sarebbe stata la seguente:

   $x_1 = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+1}$, dunque l'ipotesi è verificata per $n = 1$. La si supponga vera per n, allora
$$x_{n+1} = f(x_n) \leq f(\frac{1}{n+1}).$$
L'ultima disuguaglianza è dovuta al fatto che, per ipotesi, $x_n \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ e che f è crescente nell'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$. Dunque
$$\begin{aligned} x_{n+1} \leq \frac{n+1-1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2} &= \frac{1}{n+2}\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{n+2}\left[\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right] \leq \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$
dunque l'ipotesi induttiva è soddisfatta e questo conclude l'argomento.

3. La funzione ha dominio $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, d'altro canto può chiaramente assumere tutti i valori meno lo zero, dunque il codominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Finalmente è facile verificare che $f^{-1}(x) = x^{-1} - 1$.

4. Poichè $1 \leq n! \leq n^n$ segune che $0 \leq \ln n! \leq n \ln n$ dunque

$$0 \leq \frac{\ln n!}{n^2} \leq \frac{\ln n}{n}.$$

   La stima superiore è una successione che si sa tendere a zero e quindi il limite deve essere zero per il teorema del confronto.

   Si noti che molti hanno scritto $n^{-2} \ln n! = \sum_{k=1}^{n} n^{-2} \ln k$, cosa giusta, ma poi hanno concluso dicendo che, siccome ogni termine della somma tende a zero, la somma tende a zero. Questa affermazione è una palese sciocchezza visto che, ad esempio, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$.

5. Si applica il criterio della radice e si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \left[e^{-n} n^{10}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-1} n^{\frac{10}{n}} = e^{-1} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{10 \ln n}{n}} = e^{-1} < 1.$$

   Dunque la serie converge.