Analisi Matematica I
Correzione Primo Appello

1. Si ha
$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt{\sin^2\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$
essendo un limite notevole.

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1$$

3. Dalla formula di Taylor segue
$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}+\frac{1}{n!}e^c x^n$$
per qualche c compreso tra 0 e x. Nel nostro caso $x=\frac{1}{2}$, dunque $c\leq\frac{1}{2}$. Poichè è ben noto che $e<3$, seque $e^c\leq e^{\frac{1}{2}}\leq 2$. Quindi, segliendo $n=4$ si commette un errore
$$\frac{1}{4!}e^c 2^{-4}\leq\frac{1}{192}.$$
Poichè
$$\sum_{k=0}^{3}\frac{2^{-k}}{k!} = \frac{79}{48} = 1.6458\bar{3},$$
questo non basta per decidere se la seconda cifra deimale è 4 oppure 5. Occorre dunque usare $n=5$, per verificare che la risposta giusta è 1.64.

4. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Si noti che $f(0)=1$ e che la funzione tente a $+\infty$ per $|x|$ grande. Ora $f'(x)=1-2e^{-x}$ che si annulla solo per $x=\ln 2$, che quindi deve essere un minimo globale per la funzione. Poichè $f(\ln 2)=\ln 2$, si hanno informazioni sufficienti per tracciare il grafico. Inoltre, visto che $f(1)=2e^{-1}\leq 1$, è chiaro che $f([0,1])\subset f([\ln 2,1])$.

5. Se la successione converge, detto $\bar{x}$ il limite e visto che f è continua, deve essere

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(\bar{x}).$$

Poichè $\ln 2$ è l'unica solusione della equazione $f(x) = x$, deve essere $\bar{x} = \ln 2$. Inoltre, per ogni $n \geq m \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - x_m| = |f(x_{n-1}) - f(x_{m-1})| = |f'(c)|\,|x_{n-1} - x_{m-1}|$$

dove c è un punto tra x_{n-1} e x_{m-1}. Dall'esercizio precedente segue che tutti gli x_n devono appartenere all'intervallo $[\ln 2, 1]$. Dunque $|f'(c)| = |1-2e^{-c}| \leq 1-2e^{-1} \leq 1-2\cdot 3^{-1} = \frac{1}{3}$. Qundi si ha

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &\leq |f(x_{n-1}) - f(x_{m-1})| \leq 3^{-1}\,|x_{n-1} - x_{m-1}| \\ &\leq 3^{-2}\,|x_{n-2} - x_{m-2}| \leq 3^{-m}\,|x_{n-m} - x_0| \\ &\leq 3^{-m}e^{-1} \leq 3^{-m}2^{-1},\end{aligned}$$

il che mostra che la successione è di Cauchy. Inoltre, prendendo il limite per n che tende all'infinito nella precedente disuguaglianza, si ha

$$|\ln 2 - x_m| \leq 3^{-m}2^{-1}.$$

Basta quindi scegliere $m = 1$ per avere un errore inferiore ai due decimi. Finalmente,

$$x_1 = 2e^{-1} = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + 2(-1)^n e^{-c}\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Se questa volta scegliamo $n = 5$ abbiamo un errore di $\frac{1}{60}$ e dunque un errore totale di $\frac{1}{6} + \frac{1}{60} = \frac{11}{60} < .2$. Dunque

$$\ln 2 = \frac{9}{12} \pm .2 = .75 \pm .2.$$

In realtà,

$$|\ln 2 - x_n| = |f(\ln 2) - f(x_{n-1})| \leq \frac{1}{2}|f''(c)|\,|\ln 2 - x_{n-1}|^2.$$

Visto che $f''(c) = 2e^{-c} \leq 1$, segue

$$|\ln 2 - x_1| \leq \frac{1}{2}|\ln 2 - 1|^2 \leq \frac{1}{8}.$$

Quindi l'errore è di circa un decimo. Si noti che, a causa del quadrato nella formula dove abbiamo usato l'approssimazione di Taylor al secondo ordine, x_2 darà un'ottima approssimazione del limite.

Infine un commento: l'attento lettore si sarà certamente accorto che questo esercizio non è null'altro che l'applicazione del metodo di Newton per trovare gli zeri della funzione $e^x - 2$.