Analisi Matematica I

INFORMATICA

Secondo Esonero–Lunedi 24-01-2005

1. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua e due volte derivabile in $(0,1)$. Inoltre si supponga che $f''(x) \leq 0$, per ogni $x \in (0,1)$, e $f(0) = f(1) = 0$. Si mostri che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in (0,1)$.

2. Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{per ogni } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

   Si dica se f è ovunque derivabile. Se ne tracci il grafico.

3. Sia $f(x) := e^{-x}(1+x) - 1$. Si dimostri che, pr ogni $x \in (-1,1]$

$$|f(x)| \leq ex^2.$$

4. Sia nuovamente $f(x) := e^{-x}(1+x) - 1$. Si mostri che, per ogni $x > -1$ e $n \in \mathbb{N}$, è vera la seguente formula

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} f^k(x) + \ln(1 + f^{n+1}(x))$$

5. Si calcoli la derivata di $\arcsin(\sqrt{1-x^2})$.

Avete 2:30 ore di tempo. Ogni esercizio vale otto punti. Il punteggio finale si ottiene con la formula: punteggio totale degli esercizi meno due. La sufficienza si ottiene con un punteggio $\geq$ 18. Solo le risposte chiaramente giustificate saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera disordinata o incomprensibile saranno ignorati.