

Analisi Matematica I

INFORMATICA

Primo Appello–Martedì 01-02-2005

1. Si calcoli il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{1 - \left(\cos \frac{1}{n} \right)^2}.$$

2. Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n^2 + n + 1) - \ln(n^2 - n)].$$

3. Si calcoli $e^{\frac{1}{2}}$ con due cifre decimali esatte senza usare il calcolatore.
4. Si consideri la funzione $f(x) = x - 1 + 2e^{-x}$. Se ne tracci il grafico e si verifichi che $f([0, 1]) \subset [\ln 2, 1]$.
5. Si consideri la funzione $f(x) = x - 1 + 2e^{-x}$ e la successione, $x_0 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si mostri che, se la $\{x_n\}$ è convergente, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ln 2$.

Si mostri poi che $\{x_n\}$ è Cauchy.

Si usino questi fatti per calcolare $\ln 2$ con un errore inferiore a due decimi senza l'utilizzo di un calcolatore.

Avete 2:30 ore di tempo. Ogni esercizio vale otto punti. Il punteggio finale si ottiene con la formula: punteggio totale degli esercizi meno due. La sufficienza si ottiene con un punteggio ≥ 18 . Solo le risposte chiaramente giustificate saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera disordinata o incomprensibile saranno ignorati.