Analisi Matematica I
Correzione Quarto Appello

1. $\log_3 9 = 2$, $\log_2 5 \geq \log_2 4 = 2$.
2. Si applichi l'algoritmo euclideo. Poiche l'ultimo divisore è uno i due numeri sono primi tra loro.
3. $f(x) \geq 1/2\,x - 1/4\,x \geq 0$, $f(x) \leq 3/4$, la stima sulla derivata è banale. Ora sia $x_n = f^n(0.5)$, poiche $f(0) = 0$ si ha (Lagrange)
$$|x_{n+1}| = |f(x_n) - f(0)| \leq \frac{3}{4}|x_n|.$$
Iterando tale disuguaglianza si ottiene $x_n \leq (\frac{3}{4})^n$.
4. Basta dividere nel caso $x \leq 1$ per cui $f(x) = \ln(1) = 0$ e il caso $x > 1$ per cui $f(x) = \ln(2x - 1)$. Il resto è la solita roba.
5. Usando Lagrange ripetutamente si ha
$$\ln\left(\sqrt{\frac{n^3+n}{n^3+1}}\right) = \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^3}).$$
Da cui segue la convergenza della serie.
6. Sol. informale: Ovviamente si tratta dei triangoli isosceli. Visto che l'area è area per altezza diviso due, il massimo si ottiene per l'altezza massima (cioè uguale ad uno).
Sol. formale: Sia x l'altezza del triangolo, chiaramente $x \in [0, 1]$. Allora l'area è data da $\frac{1}{2}2x = x$. Chiaramente ilk massimo si ha per $x = 1$.