Analisi Matematica I
Correzione Terzo Appello

1. $1000000^{200} = (10^6)^{200} = 10^{1200}$; $(1000!)^2 \leq (1000^{1000})^2 = 10^{6000}$; $10! = 3628800$, $2^4 > 10$ quindi $2^{10!} \geq 10^{907200}$. D'altro canto $(1000!)^2 \geq (500^{500})^2 \geq (20^2)^{1000} \geq 10^{2000}$. Dunque
$$1000000^{200} < (1000!)^2 < 2^{10!}.$$

2. $$\frac{q+1}{q-1} = 1 + \frac{2}{q-1}.$$
Dunque, il numero di cui sopra puo essere intero se e solo se $2(q-1)^{-1} \geq 1$ cioè $q \leq 3$. Da cui segue che gli unici numeri permessi sono 2 e 3.

3. $$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{(q+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^n} \leq \frac{1}{(q+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} \leq \frac{1}{q!q}.$$
Veniamo alla seconda disuguaglianza.
$$\frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} = \frac{p(q-1)! - \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!}}{q!}$$
dunque la sola possibilità per la disuguaglianza di essere falsa è se
$$p(q-1)! - \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} = 0, \tag{1}$$
dividendo il tutto per $(q-1)$ si ottiene
$$p(q-2)! - \sum_{n=0}^{q-2} \frac{(q-2)!q}{n!} = \frac{q}{q-1} + \frac{1}{q-1} = \frac{q+1}{q-1}$$
ma il menbro di sinistra è palesemente un numero intero mentre quello di destra non lo è mai (vedi esercizio 2) dunque abbiamo

una contraddizione. Di consequenza (1) deve essere falsa, cioè la disuguaglianza voluta deve essere vera.

A questo punto si puo concludere: se $q > 3$ da quanto visto segue che

$$\left|e - \frac{p}{q}\right| \geq \left|\frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!}\right| - \left|\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}\right| \geq \frac{1}{q!} - \frac{1}{q!q} > 0$$

Dunque e non puo mai essere uguale ad un numero razionale a meno che il denominatore non sia inferiore a 3, ma

$$|e - \frac{8}{3}| = |e - (1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6})| \leq \frac{1}{3!3} = \frac{1}{18}$$

quindi e non puo essere ne 3 ne $8/3$ ne altro numero razionale con denominatore minore di 4, e quindi non puo essere alcun numero razione, cioè e è un numero irrazionale. (Meditate gente, meditate)

4. Usando il criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to\infty} (1 - 1/n)^n = e^{-1} < 1$$

dunque la serie e' convergente. Razionalizzando si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{2}.$$

5. Il dominio è $x \in [-2, 2]$ poiche per questi valori la quantita' sotto ambedue le radici è positivo. Poi il grafico è simmetrico attorno ad 0. In più in zero la funzione non è differenziabile. Per vederlo si espanda la prima radice usando Taylor al secondo ordine. Si ottiene

$$\sqrt{2 - (2 + (x/2)^2 + \mathcal{O}(x^4))} = \frac{|x|}{2} + \mathcal{O}(|x|^3).$$

Inoltre è facile vedere che per ogni $x > 0$ la derivata è positiva. Dunque la funzione ha un minimo in zero, ma in zero ha uno spigolo.

6. Prima di tutto, è facile vedere dal grafico dell'esercizio precedente che $f(x) \leq \sqrt{2}x$, per $x > 0$. Da questo segue

$$\ell_n = f(\ell_{n-1}) \leq (\sqrt{2})^{-1}\ell_{n-1} \leq (\sqrt{2})^{-n}\ell_0 = 2(\sqrt{2})^{-n}.$$

Dunque $\lim_{n\to\infty} \ell_n = 0$ (e questo, come ho detto durante lo scritto, assicurava gia almeno 4 punti). Tuttavia per rispondere alla domanda è necessaria una stima più precisa. Raffiniamo la stima gia visto nell'esercizio precedente: per $x > 0$

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{32} + \mathcal{O}(x^5)$$

dove abbiamo usato Taylor al terzo ordine per sviluppare la radice. A questo punto, se x è sufficientemente piccolo, si ha

$$f(x) \leq \frac{x}{2}(1 + \frac{x^2}{8}) \leq \frac{x}{2} e^{\frac{x^2}{8}}.$$

Ora, poiche ℓ_n tende a zero, eriste un n_0 tale che per tutti gli $n > n_0$ ℓ_n è abbastanza piccolo nel senso di cui sopra.

Usiamo ora questa disuguaglianza per iterare, come abbiamo fatto sopra,

$$\begin{aligned} \ell_n =& f(\ell_{n-1}) \leq \ell_{n-k} 2^{-k} e^{\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{k} \ell_{n-j}^2} \leq \ell_{n_0} 2^{-n+n_0} e^{\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n-n_0} \ell_{n-j}^2} \\ &\leq \ell_{n_0} 2^{-n+n_0} e^{\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{\infty} \ell_j^2}. \end{aligned}$$

Dunque, usando la stima gia ottenuta

$$\ell_n \leq \ell_{n_0} 2^{-n+n_0} e^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}} \leq \ell_{n_0} 2^{-n+n_0} e.$$

Finalmente,

$$2^n \ell_n \leq 2^{n_0} \ell_{n_0} e$$

che non dipende da n e dunque mostra che la succesione a_n è limitata.

Per i **curiosi**, il *segreto* di questo esercizio è il seguente. Un piccolo calcolo trigonomerico (o un semplice disegno) mostra che, per ogni$\varphi \in [0, \pi/2]$,

$$f(2 \sin \varphi) = 2 \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Allora se si pone $\varphi_0 = \pi$ e $\varphi_{n+1} = \frac{\varphi_n}{2}$ si ha $\ell_n = 2 \sin \varphi_{n+1}$. Il semplice disegno a cui facevo riferimento sopra consiste nel realizzare che ℓ_n è il lato del poligono regolare con 2^{n+1} lati. Dunque a_n non è altro che il semiperimentro di tale poligono. Poichè il perimetro dei poligoni inscritti dovrebbe convergere alla lunghezza della circoferenza (Archimede docet) si deve avere che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi,$$

dunque, non solo la succesione è limitata ma converge pure e a nientedimeno che al nostro amico π.