

Alcuni problemi non banali concernenti i limiti

CARLANGELO LIVERANI
Dipartimento di Matematica
Università di Roma (Tor Vergata)
Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy
liverani@mat.uniroma2.it

Rome, Novembre 5, 2001

1 QUANTO SPESSO VI PAGANO GLI INTERESSI?

Supponiamo di avere un capitale di $a > 0$ euro e di metterlo in una banca che ci paga l'uno per cento annuo su base annua. Questo significa che, dopo un anno, il nostro capitale sarà $a + a/100 = a(1 + 1/100)$. A questo punto riceviamo una pubblicità di un'altra banca che ci offre lo stesso tasso di interesse ma che lo paga su di una base semestrale. Ciò significa che dopo sei mesi paga mezzo punto, dunque dopo sei mesi il nostro capitale sarà $a + a/200$ e dopo altri sei mesi ci viene pagato l'interesse su questo capitale, dunque dopo un anno avremo

$$\left(a + \frac{a}{200}\right) + \frac{1}{200} \left(a + \frac{a}{200}\right) = a \left(1 + \frac{1}{200}\right)^2.$$

Per esempio, se il nostro capitale iniziale è di 10000 euro ($a = 10000$), allora nel primo caso dopo un anno abbiamo 10100 euro, nel secondo 10100.25 euro (arrotondato al centesimo). Insomma, non molto di più ma comunque di più. Stiamo per trasferire i nostri fondi in tale banca quando veniamo a sapere un'altra banca paga gli interessi su base quadrimestrale, cioè tre volte all'anno. Un rapido calcolo ci fa vedere che in questo caso alla fine di un anno il nostro capitale sarebbe

$$a \left(1 + \frac{1}{300}\right)^3.$$

Dunque, se $a = 10000$ si ottiene 10100.33 (arrotondato al centesimo), ancora un poco di più che nel caso precedente. Saputo ciò cadiamo vittima dell'avidità e ci chiediamo che succederebbe se ci pagassero gli interessi n volte all'anno. Chiaramente dopo un anno avremmo

$$a \left(1 + \frac{1}{100n}\right)^n. \tag{1.1}$$

Che succede a questa successione, cresce arbitrariamente oppure, purtroppo, è limitata?

Per capirlo vediamo un caso più semplice, ovvero dallo studio della successione¹

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ci serve un risultato ausiliario.

Lemma 1.1 *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $0 \leq k \leq n/2$ si ha*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \frac{2k}{n}.$$

PROOF Cominciamo col vedere che succede se $n = 1$ e quindi $k = 0$.

$$(1 + 1)^0 = 1 \leq 1$$

dunque in questo caso il lemma è vero. Proviamo con $n = 2$, chiaramente le sole possibilità sono $k \in \{0, 1\}$. Se $k = 0$ si ha $1 \leq 1$, se $k = 1$

$$(1 + 1/2)^1 = 3/2 \leq 1 + 2/2 = 2,$$

e nuovamente la cosa è vera. Ovviamente, poichè il numero dei casi da verificare è infinito non possiamo continuare in questo modo, è necessaria una strategia migliore, questa è fornita dal *principio di induzione*.

Consideriamo un n arbitrario allora per $k = 0$ abbiamo $1 \leq 1$, per $k = 1$

$$(1 + 1/n)^1 \leq 1 + 2/n$$

che ancora è vero. Supponiamo ora di avere controllato la validità della affermazione per tutti i k più piccoli di un certo $k_* < n/2$. Consideriamo allora $k_* + 1$. Se $k_* + 1 > n/2$ allora abbiamo finito, altrimenti

$$\begin{aligned} (1 + 1/n)^{k_*+1} &= (1 + 1/n)^{k_*} (1 + 1/n) \leq \left(1 + \frac{2k_*}{n}\right) (1 + 1/n) \\ &= 1 + \frac{2k_* + 1}{n} + \frac{2k_*}{n^2} \leq 1 + \frac{2(k_* + 1)}{n}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Da cui segue che l'affermazione del Lemma deve essere valida anche per $k_* + 1$. Ma allora, usando questo risultato, e poichè abbiamo già controllato il caso $k_* = 1$, ne segue che l'affermazione deve essere valida per $k_* + 1 = 2$. Ma ora nulla ci impedisce di usare (1.2) con $k_* = 2$ ottenendo perciò la validità del Lemma per $k = 3$. Chiaramente continuando in questo modo dopo un numero finito di passi si sarà controllato la validità del Lemma per tutti i $k \leq n/2$. Il Lemma segue allora dalla arbitrarietà di n . $\square$

¹Si tratterebbe di una banca assurdamente generosa, che paga un interesse del 100%.

Usando il risultato precedente siamo in grado di vedere che la successione a_n è limitata. Infatti se n è pari ($n = 2m$) possiamo scrivere

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m\right]^2 \leq \left(1 + \frac{2m}{n}\right)^2 = 4.$$

Se invece n è dispari ($n = 2m + 1$) allora

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m\right]^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 4 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 8.$$

A questo punto per vedere che esiste il limite basterebbe l'andamento che abbiamo visto all'inizio di questa discussione, ossia che la successione è crescente. Per vedere ciò è necessario un altro risultato ausiliario.²

Lemma 1.2 *Per ogni $b > -1$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$(1 + b)^n \geq 1 + nb.$$

PROOF Se $n = 1$ si ha una uguaglianza, dunque il Lemma è vero per $n = 1$. A questo punto usiamo di nuovo il principio di induzione.³ Supponiamo il Lemma vero per un qualche $n \in \mathbb{N}$ allora

$$(1 + b)^{n+1} = (1 + b)^n(1 + b) \geq (1 + nb)(1 + b) = 1 + (n + 1)b + nb^2 \geq 1 + (n + 1)b.$$

La prima disuguaglianza segue dall'ipotesi che $1 + b > 0$ e dall'ipotesi induttiva $(1 + b)^n > 1 + nb$. Dunque, poichè è vero per uno, sarà vero per due, per tre e così via. $\square$

A questo punto per verificare che la successione è crescente dobbiamo dimostrare che per ogni n vale $a_{n+1} \geq a_n$.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left[\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right]^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \geq 1 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato Lemma 1.2 con $b = -n(n+1)^{-2}$.

Dunque la successione (1.1) è monotona crescente e limitata e quindi ammette limite, chiamiamo e tale limite. Notare che, sebbene abbiamo stabilito la sua esistenza, non sappiamo un gran ch  sul numero e . A questo punto possiamo tornare alla nostra successione originaria

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{100n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{100n}\right)^{100n}\right]^{\frac{1}{100}} = e^{\frac{1}{100}}.$$

²Il seguente risultato è noto come *disuguaglianza di Bernoulli*.

³Questa volta si tratta di una cosa pi  seria visto che lo usiamo non sull'insieme finito $k \leq n/2$, bens  sull'insieme infinito $\mathbb{N}$.

Ponendo $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ in (2.2) otteniamo

$$\cos \frac{2\pi}{n} \leq \frac{\sin \left(\frac{2\pi}{n} \right)}{\frac{2\pi}{n}} \leq 1$$

ovvero

$$\pi r^2 \cos \frac{2\pi}{n} \leq A_{i,n} \leq \pi r^2.$$

Visto che chiaramente $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{2\pi}{n} = 1$, ne segue, per il confronto, che $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{i,n} = \pi r^2$.

Analogamente, da (2.2),

$$1 \leq \frac{\tan \alpha}{\alpha} \leq \frac{1}{\cos \alpha}$$

e, allo stesso modo che sopra, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{c,n} = \pi r^2$.

Finalmente, prendendo il limite per n che va all'infinito nella 2.1 si ottiene la ben nota formula:

$$A_c = \pi r^2.$$

Notare che tutto si basa sul limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

la cui validità è sopra dimostrata.

3 IL LOGARITMO

L'utilità del logaritmo nasce dalla sua caratteristica di trasformare prodotti in somme facilitando in tal modo calcoli complessi.⁴ Vediamo come nasce una tale funzione.

Supponiamo di cercare una funzione $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che abbia la magica proprietà

$$\ell(ab) = \ell(a) + \ell(b), \tag{3.1}$$

esiste una tale funzione e se si come è fatta?

Prima di tutto notiamo che per ogni numero $a \in \mathbb{R}$, dovrebbe essere

$$\ell(0) = \ell(0 \cdot a) = \ell(0) + \ell(a)$$

ma questo implicherebbe $\ell(a) = 0$ sempre, una funzione non molto interessante! Rassegnamoci dunque al fatto che una tale funzione non può essere definita in 0. Limitamoci a cercare $\ell : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ con la proprietà (3.1).

$$\ell(1) = \ell(1 \cdot 1) = 2\ell(1)$$

⁴Con l'avvento dei calcolatori questo aspetto dei logaritmi ha perso di importanza ma non per questo l'utilità dei logaritmi è venuta a cessare.

dunque deve essere $\ell(1) = 0$. D'altro canto

$$\ell(a^p) = p\ell(a)$$

e

$$0 = \ell(1) = \ell(aa^{-1}) = \ell(a) + \ell(a^{-1})$$

dunque $\ell(a^{-1}) = -\ell(a)$. Infine,

$$\ell(a) = \ell(a^{\frac{a}{q}}) = q\ell(a^{\frac{1}{q}})$$

cioè $\ell(a^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q}\ell(a)$. In conclusione abbiamo che, per ogni numero $b \in \mathbb{Q}$ si ha

$$\ell(a^b) = b\ell(a). \quad (3.2)$$

Questa proprietà è ovviamente molto conveniente per calcolare potenze e radici di numeri. se $\bar{a} \in \mathbb{R}^+$ è tale $\ell(\bar{a}) = 1$ allora la (3.2) diventa $\ell(a^b) = b$; cioè sui razionali ℓ è l'inverso della elevazione a potenza. Inoltre è chiaro che se una funzione ℓ soddisfa (3.1) allora anche la funzione $\lambda\ell$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ soddisferà (3.1).

Questo ci da una buona idea delle proprietà di ℓ ma la domanda rimane: esiste una tale funzione sui reali con la magica proprietà (3.1)?

Per rispondere a questa ultima domanda è possibile ragionare in diversi modi. Il mod sotto riportato è interessante per il suo particolare sapore geometrico.

Purtroppo è necessario iniziare con una piccola digressione.

Per ogni $a \in \mathbb{R}^+$ si consideri la trasformazione del piano $T_a(x, y) := (ax, a^{-1}y)$. Se prendiamo il quadrato $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2], y \in [0, 1]\}$ allora $T_a Q$ è il rettangolo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, 2a], y \in [0, a^{-1}]\}$, si veda la figura 2 per un esempio della azione di T_a nel caso $a = 2$.

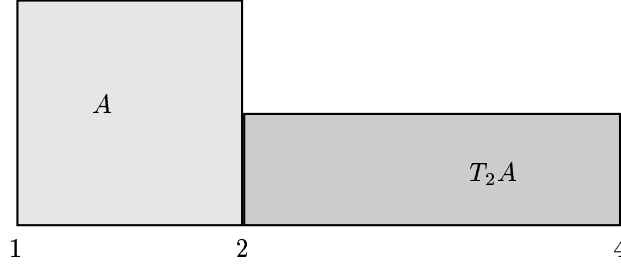


Figure 2: Azione di T_2 .

La cosa interessante delle trasformazioni T_a è che l'immagine di un rettangolo è un rettangolo e che l'area del rettangolo immagine è uguale all'area del rettangolo originario (uno nell'esempio in figura). Sembra quindi naturale che questa proprietà di conservare le aree valga per qualunque (ragionevole) regione del piano. Assumiamolo e vediamo che ne segue.⁵

⁵Il problema chiaramente è che non abbiamo ancora definito l'area di una figura *qualsiasi* e dunque non è ben chiaro come calcolarne algebricamente il valore, tuttavia il suo significato geometrico-intuitivo dovrebbe essere chiaro.

Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ per $x > 0$, si tratta di una iperbole. Si definisca la funzione $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ nel modo seguente: se $z \geq 1$ allora $\ln(z)$ è uguale all'area della regione $P(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, z]; 0 \leq y \leq 1/x\}$. Per esempio l'area della regione grigio chiaro nella figura 3 è il valore di $\ln(2)$. Se invece $z < 1$ allora $\ln(z)$ è uguale all'area della regione $P(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [z, 1]; 0 \leq y \leq 1/x\}$ presa col segno negativo. Chiaramente $\ln(z)$ è una funzione ben definita (almeno dal punto di vista geometrico).

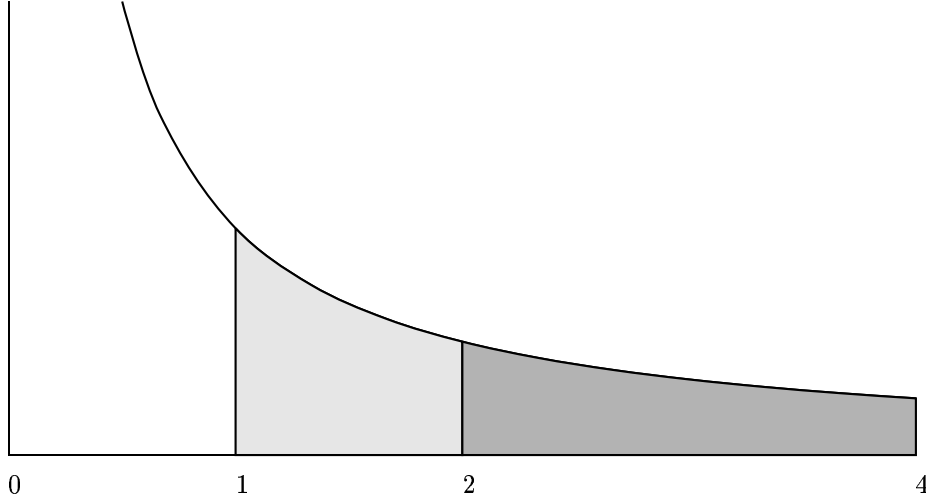


Figure 3: Grafico di $f(x) = 1/x$

Vediamo che succede applicando la trasformazione T_a alla regione $P(z)$. Se $y \geq 0$ allora $a^{-1}y \geq 0$ inoltre se $y \leq 1/x$ allora $a^{-1}y \leq a^{-1}/x = 1/(ax)$. Ciò significa che se un punto appartiene all'iperbole anche il punto immagine apparterrà all'iperbole, mentre se un punto si trova sotto l'iperbole allora anche il punto immagine giace sotto l'iperbole, dunque $T_a P(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, za]; 0 \leq y \leq 1/x\}$. Nella figura 3 si vede la regione $T_a P(z)$, nel caso speciale in cui $z = 2$ ed $a = 2$, obreggiata in grigio scuro.

Da quanto detto segue che $P(a) \cup T_a P(b) = P(ab)$ (nel caso in figura $P(2) \cup T_2 P(2) = P(4)$). Ma questo significa

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

cioè la funzione $\ln$ ha la proprietà (3.1)! Dunque tali funzioni esistono, ma siamo in grado di calcolarne i valori?

Chiaramente $\ln$ è crescente ed illimitata, dunque è ragionevole assumere che esista un numero reale e tale che $\ln(e) = 1$, vediamone comunque una dimostrazione rigorosa basta su di un modo di ragionare che ci dovrebbe essere ormai familiare.

Lemma 3.1 *Esiste un numero $e \in \mathbb{R}$ tale che $\ln(e) = 1$.*

PROOF Prima di tutto vediamo che esiste un numero a_1 tale che $\ln(a_1) > 1$. Poichè dalla figura 3 è ovvio $\ln 2 > 0$ ne segue che $\ln 2^n = n \ln 2 > 1$ a patto che n sia sufficientemente grande (più grande di $(\ln 2)^{-1}$ per la precisione). Abbiamo perciò che nell'intervallo $[1, a_1]$ la funzione $\ln$ cresce da 0 ad un valore maggiore di 1. Dividiamo l'intervallo a metà (sia a_2 il punto medio) se $\ln a_2 = 1$ abbiamo trovato il numero che cercavamo, se $\ln a_2 < 1$ allora consideriamo l'intervallo $[a_2, a_2]$; se invece $\ln a_2 > 1$ allora consideriamo l'intervallo $[1, a_2]$. In entrambi i casi abbiamo un intervallo di lunghezza $(a_1 - 1)/2$ in cui $\ln$ vale meno di uno nell'estremo di sinistra e vale più di uno sull'estremo di destra (comme sull'intervallo ordinario). Ora dividiamo nuovamente l'intervallo a metà, chiamiamo a_3 il punto medio, e ragionando come sopra otteniamo un nuovo intervallo, questa volta di lunghezza $(a_1 - 1)/4$, tale che $\ln$ vale meno di uno nell'estremo di sinistra e vale più di uno sull'estremo di destra (a meno che a_3 non fosse il numero cercato).

A questo punto possiamo iterare questa procedura quante volte vogliamo e, se non troviamo prima il numero voluto, otteniamo una successione $\{a_n\}$, chiaramente tale successione è di Cauchy, sia e il suo limite. Per costruzione

$$|e - a_n| \leq \frac{a_1 - 1}{2^{n-1}}.$$

Rimane da investigare che succede alla successione $\{\ln a_n\}$. Se $a > b > 1$ allora $\ln a - \ln b \leq b^{-1}(a - b)$, questo perchè $\ln a - \ln b$ è semplicemente l'area sotto l'iperbole nell'intervallo $[b, a]$ mentre $b^{-1}(a - b)$ è l'area di un rettangolo di base $[b, a]$ e altezza b^{-1} che ovviamente contiene l'area precedente (si veda la figura 4).

Dunque si ha $|\ln a_n - \ln e| \leq |e - a_n| \leq (a_1 - 1)2^{-n+1}$, perciò $\ln e = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n$. Ma

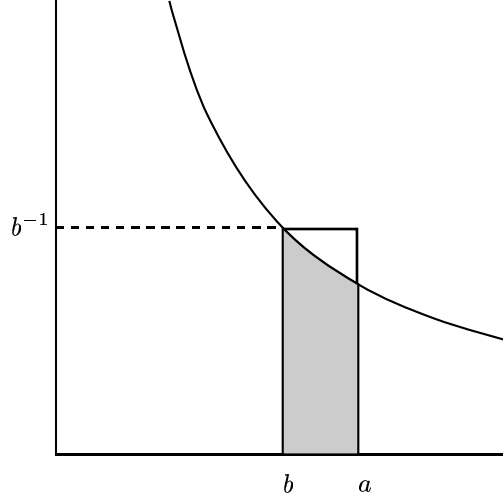


Figure 4: Come stimare l'area sotto l'iperbole

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ per costruzione e questo conclude il Lemma. Infatti, la successione

$\{\ln a_n\}$ è l'unione di due sottosuccessioni: quella degli a_n che sono il limite sinistro di uno degli intervalli che abbiamo costruito iterativamente e quella degli a_n che sono un limite destro. Queste due sottosuccessioni devono avere lo stesso limite della successione $\ln a_n$ ma una deve avere limite minore od uguale ad uno e l'altra maggiore o uguale a uno, per il modo con cui sono stati costruiti gli intervalli. Dunque l'unica possibilità è che il limite sia uno. $\square$

Dunque il numero e esiste, ma di che numero si tratta?

Consideriamo $\ln(1 + 1/n)$, chiaramente

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n}. \quad (3.3)$$

Infatti guardando alla figura 5, si vede che la prima quantità è l'area del rettangolo grigio scuro, la seconda (in grigio) è l'area sotto l'iperbole (che definisce $\ln$) e la terza è l'area del rettangolo più alto (in grigio chiaro).

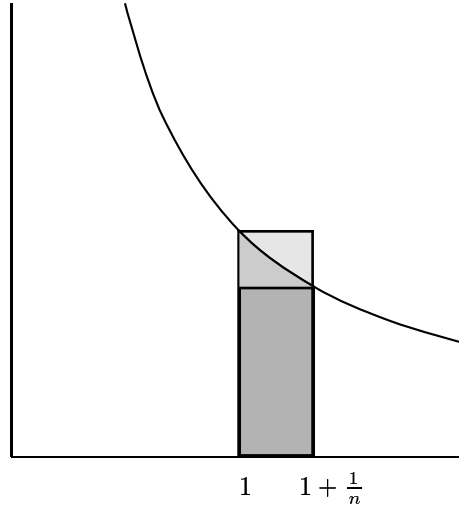


Figure 5: Aree rilevanti per l'equazione (3.3)

Dalla (3.3) e dalle proprietà di $\ln$ segue che

$$1 \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \quad \text{e che} \quad \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq 1. \quad (3.4)$$

Poichè la funzione $\ln$ è crescente

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}. \quad (3.5)$$

Vediamo dunque che e non era un nome casuale, si tratta infatti della nostra vecchia conoscenza (si veda la prima sezione di queste note). D'altro canto le

(3.4) implicano

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{e}{n}$$

e da questo segue una dimostrazione alternativa del limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Per di più la (3.3) ci permette una conoscenza più precisa del misterioso numero e , infatti prendendo, ad esempio, $n = 5$ si ottiene $2.48832 \leq e \leq 2.985984$.⁶

⁶Il lettore che ha voglia di fare alcuni calcoli numerici può facilmente ottenere stime migliori scegliendo un n più grande.