# Analisi Matematica I
## Primo Esonero
## A

1. Si verifichi che la funzione $f(x) = e^x + 1$ è monotona crescente (cioè se $x \geq y$ allora $f(x) \geq f(y)$).

2. Si calcoli il limite
$$\lim_{n\to\infty} n \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right\}.$$

3. Si studi la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} n! 2^{-n^2}.$$

4. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{1}{2} - e^{-x^2}.$$
Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno due soluzioni in $\mathbb{R}$.

5. Si consideri la funzione
$$f(x) = e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}+3} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}^+.$$
Si determini $f^{-1}$.

6. Sia $a = 0.\overline{123}$ dove la barra sopra 123 significa che le cifre sono ripetute indefinitivamente (cioè $a = 0.123123123\ldots$). Si dimostri che $a \in \mathbb{Q}$.

---

*Avete 3 ore di tempo. Ogni esercizio vale sei punti. La sufficienza si ottiene con un punteggio $\geq$ 18.* **Solo le risposte chiaramente giustificate saranno prese in considerazione.** ELABORATI ILLEGGIBILI O CONFUSI VERRANNO IGNORATI. *La sintesi sarà particolarmente apprezzata.*