

Corso di Geometria - CdL triennale in Ingegneria a.a. 2018-19

C. Liverani, J. Garofali

Tutorato del 31/05/19

1 Cambiamenti di base

Per fissare le notazioni ricordiamo che date due basi $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ di uno spazio vettoriale V , chiamiamo matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ la matrice $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$ tale che $v'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$ (dove i è l'indice di riga e j l'indice di colonna). Se denotiamo rispettivamente con x e x' le coordinate rispetto $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, il relativo cambiamento di coordinate è dato da $x = Ax'$. Denoteremo A con $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id)$.

Analogamente data una base $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di uno spazio vettoriale W e una applicazione lineare $f : V \rightarrow W$, denotiamo con $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ la matrice $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, n}$ che rappresenta f nelle basi $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C}$ in arrivo, ovvero data da $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$.

1. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- i) Dimostrare che $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ sono basi;
 - ii) Trovare la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ del cambiamento di base da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$;
 - iii) Trovare le coordinate rispetto a $\mathcal{B}_1$ di $w = 3w_1 - 5w_3$.
2. Trovare un cambiamento di coordinate $x' = Ax$ tale che $A^T A = I$, $\det(A) = 1$ e tale che il piano di equazione $\sqrt{2}x_1 + x_2 - x_3 = 0$ abbia equazioni $x'_3 = 0$ nel nuovo sistema di riferimento.
 3. Dati i polinomi $p_1(t) = t^2 + t$, $p_2(t) = 2t^2 + 3t + 1$, $p_3(t) = -t^2 + 2$, $q_1(t) = -t^2$, $q_2(t) = -2t^2 - t - 2$, $q_3(t) = t^2 + t$
 - i) Dimostra che $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ e $\mathcal{B}' = \{q_1, q_2, q_3\}$ sono basi di $\mathbb{R}[t]_2$;
 - ii) Trovare la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$;
 - iii) Trovare le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di $f(t) = 3t^2 - 5t + 1$.

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $f(x) = Ax$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Trovare la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(f)$ che rappresenta f nelle basi $\mathcal{B}_1$ in partenza e $\mathcal{B}_2$ in arrivo che trovate nell'esercizio 1).

5. Dato il sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$

- i) Trovare una base $\mathcal{B}$ di W ;
- ii) Completare $\mathcal{B}$ a una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^4$ e calcolare la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{E}}(id)$, dove $\mathcal{E}$ è la base standard;
- iii) Si consideri $T : W \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare data da

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

Dimostrare che $Im(T) \subset W$ e calcolare la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ che rappresenta l'endomorfismo $T : W \rightarrow W$ nella base $\mathcal{B}$.

6. Si considerino $\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2\} \subset \mathbb{R}[t]_2$ e l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}[t]_2 \rightarrow \mathbb{R}[t]_2$ data da $T(p)(t) = p'(t+1)$ (dove p' è la derivata prima di p).

- i) Dimostrare che l'insieme (ordinato!) $\mathcal{B}$ è una base e calcolare la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id)$ del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$;
 - ii) Si calcolino le matrici $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$.
7. Date due matrici $A, B \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$ esse si dicono simili se esiste una matrice C invertibile tale che $CB = AC$. Dimostrare che A e B sono simili se e solo se rappresentano lo stesso endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ in basi diverse.