Corso di Geometria - CdL triennale in Ingegneria
a.a. 2018-19

C. Liverani, J. Garofali

Tutorato del 31/05/19

1 Cambiamenti di base

Per fissare le notazioni ricordiamo che date due basi $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ di uno spazio vettoriale V, chiamiamo matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ la matrice $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n}$ tale che $v'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$ (dove i è l'indice di riga e j l'indice di colonna). Se denotiamo rispettivamente con x e x' le coordinate rispetto $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, il relativo cambiamento di coordinate è dato da $x = Ax'$. Denoteremo A con $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id)$.
Analogamente data una base $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di uno spazio vettoriale W e una applicazione lineare $f : V \to W$, denotiamo con $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ la matrice $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$ che rappresenta f nelle basi $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C}$ in arrivo, ovvero data da $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$.

1. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i) Dimostrare che $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ sono basi;

ii) Trovare la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ del cambiamento di base da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$;

iii) Trovare le coordinate rispetto a $\mathcal{B}_1$ di $w = 3w_1 - 5w_3$.

Soluzione.

i) Sia B_i la matrice avente come colonne i vettori della base $\mathcal{B}_i$ per $i = 1, 2$. Abbiamo che $\mathcal{B}_i$ è una base se e solo se $det(B_i) \neq 0$, cosa che si verifica facilmente.

ii) La matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ ha come colonna j-esima il vettore delle coordinate di w_j rispetto la base $\mathcal{B}_1$, ovvero detto x_j tale vettore, esso soddisfa $B_1 x_j = w_j$. Ma questo scritto in forma compatta diventa la seguente identità tra matrici: $B_1 \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = B_2$, cosa che si verifica anche osservando che B_i è la matrice del cambiamento di base dalla base standard alla base $\mathcal{B}_i$ e che, date $\mathcal{B}_i$, i=1,2,3, tre basi qualsiasi, vale la formula

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}$$

Dunque $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = B_1^{-1}B_2 = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Notiamo che avremmo potuto fare direttamente il punto *ii*), ovvero si poteva tentare di calcolare la matrice del cambiamento e, nel caso si avesse avuto successo, sarebbe bastato controllare che tale matrice è non degenere: questo dimostra che effettivamente sono due basi.

2. Trovare un cambiamento di coordinate $x' = Ax$ tale che $A^T A = I$, $det(A) = 1$ e tale che il piano di equazione $\sqrt{2}x_1 + x_2 - x_3 = 0$ abbia equazioni $x_3' = 0$ nel nuovo sistema di riferimento.

   Soluzione. Basta trovare una rotazione che porti il versore normale al piano $\sqrt{2}x_1 + x_2 - x_3 = 0$, ovvero $\nu = (1/\sqrt{2}, 1/2, -1/2)$ in un versore normale al piano $x_3 = 0$. Scegliamo quest'ultimo uguale a $-e_3$ per convenienza. Vediamo subito che la proiezione ortogonale di ν sul piano $x_1 = 0$, $(0, 1/2, -1/2)$ forma un angolo di $\pi/4$ con $-e_3$ e quindi facendo una rotazione rispetto l'asse delle x_1 di angolo $\pi/4$ in senso orario rispetto il piano y, z l'immagine di ν apparterrà al piano $x_2 = 0$. La matrice che fa questo è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

   Si calcola che $A\nu = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$, il quale a sua volta forma un angolo di $\pi/4$ con $-e_3$ e deve quindi essere ruotato rispetto l'asse delle x_2, di nuovo in senso orario nel piano x, z, per finire su $-e_3$. La matrice da applicare a questo punto è

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

   Dunque il cambio di coordinate cercato è $x' = BAx$ ovvero

$$\begin{cases} x_1' = 1/\sqrt{2}x_1 - 1/2x_2 + 1/2x_3 \\ x_2' = 1/\sqrt{2}x_2 + 1/\sqrt{2}x_3 \\ x_3' = -1/\sqrt{2}x_1 - 1/2x_2 + 1/2x_3 \end{cases}$$

   Lo studente può controllare che il cambio di coordinate inverso è

$$\begin{cases} x_1 = 1/\sqrt{2}x_1' - 1/\sqrt{2}x_3' \\ x_2 = -1/2x_1' + 1/\sqrt{2}x_2' - 1/2x_3' \\ x_3 = 1/2x_1' + 1/\sqrt{2}x_2' + 1/2x_3' \end{cases}$$

   e quindi $\sqrt{2}x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3' = 0$.

3. Dati i polinomi $p_1(t) = t^2 + t$, $p_2(t) = 2t^2 + 3t + 1$, $p_3(t) = -t^2 + 2$, $q_1(t) = -t^2$, $q_2(t) = -2t^2 - t - 2$, $q_3(t) = t^2 + t$

   i) Dimostra che $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ e $\mathcal{B}' = \{q_1, q_2, q_3\}$ sono basi di $\mathbb{R}[t]_2$;

   ii) Trovare la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$;

   iii) Trovare le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di $f(t) = 3t^2 - 5t + 1$.

   Soluzione. Ragionando come nell'esercizio 1), la matrice X del cambiamento di base (se esiste) è la matrice non degenere che soddisfa $BX = B'$ con B e B' le matrici ottenute mettendo in colonna le coordinate rispetto la base $\{1, x, x^2\}$ dei vettori che formano, rispettivamente, le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Ora se tramite un'eliminazione di Gauss sulla righe della matrice 3×6 data da $[B\,B']$, possiamo arrivare alla fine ad ottenere la matrice della forma $[I\,X]$ con $det(X) \neq 0$, allora abbiamo concluso: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono basi e $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = B^{-1}B' = X$.
   Si calcola che nel nostro caso

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -6 & -13 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

   e che $det(X) \neq 0$.

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(x) = Ax$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

   Trovare la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(f)$ che rappresenta f nelle basi $\mathcal{B}_1$ in partenza e $\mathcal{B}_2$ in arrivo che trovate nell'esercizio 1).

   Soluzione. Dobbiamo trovare la matrice X tale che, dato il vettore $v^{(1)}$ delle coordinate di $x \in \mathbb{R}^3$ rispetto la base $\mathcal{B}_1$, il vettore $v^{(2)} = Xv^{(1)}$ sia il vettore delle coordinate di $y = Ax$ rispetto la base $\mathcal{B}_2$.
   Nelle notazioni dell'esercizio 1) abbiamo le seguenti relazioni: $v^{(2)} = Xv^{(1)}$, $x = B_1 v^{(1)}$ e $y = B_2 v^{(2)}$. Dunque $y = Ax \Leftrightarrow B_2 v^{(2)} = AB_1 v^{(1)}$, cioè $X = B_2^{-1} A B_1$. Si calcola che

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 3 \\ -17 & -15 & -12 \end{pmatrix}$$

5. Dato il sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$

   i) Trovare una base $\mathcal{B}$ di W;

   ii) Completare $\mathcal{B}$ a una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^4$ e calcolare la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{E}}(id)$, dove $\mathcal{E}$ è la base standard;

iii) Si consideri $T : W \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare data da

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

Dimostrare che $Im(T) \subset W$ e calcolare la matrice $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T)$ che rappresenta l'endomorfismo $T : W \to W$ nella base $\mathcal{B}$.

Soluzione.

i) Ad esempio $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

ii) Sappiamo che il vettore $n = (1, 1, -1, -1)^T$ è normale all'iperpiano W e completa una base di W a una base di $\mathbb{R}^4$. Prendiamo dunque come base $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, n\}$ dove i w_i sono nell'ordine quelli elencati sopra. La matrice che stiamo cercando è chiaramente l'inversa della matrice che come colonne i vettori della base $\mathcal{B}'$:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}'}(id) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

iii) Dobbiamo trovare le coordinate di $T(w_i)$ rispetto la base data dai w_i e metterle in colonna. Si calcola che la matrice A che ha come colonne i vettori $T(w_i)$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo risolvere tre sistemi lineari con la stessa matrice dei coefficienti, la matrice B formata dai w_i messi in colonna, ovvero in forma compatta abbiamo

$$B\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T) = A$$

che si calcola facilmente in quanto il minore principale della matrice dei coefficienti è l'identità:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Si considerino $\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2\} \subset \mathbb{R}[t]_2$ e l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}[t]_2 \to \mathbb{R}[t]_2$ data da $T(p)(t) = p'(t+1)$ (dove p' è la derivata prima di p).

i) Dimostrare che l'insieme (ordinato!) $\mathcal{B}$ è una base e calcolare la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id)$ del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$;

ii) Si calcolino le matrici $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$.

Soluzione. La matrice

$$B = \mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è chiaramente invertibile (ad esempio perchè $det = 1$) e la sua inversa è

$$B^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo l'applicazione T sulla base standard: chiaramente $T(1) = 0$, $T(t) = 1$, $T(t^2) = 2(t+1)$ e dunque la matrice che la rappresenta in questa base è

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T) = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. Date due matrici $A, B \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R})$ esse si dicono simili se esiste una matrice C invertibile tale che $CB = AC$. Dimostrare che A e B sono simili se e solo se rappresentano lo stesso endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in basi diverse.

   Soluzione. Se A e B sono simili, allora abbiamo una matrice non singolare C che le coniuga, ovvero $B = C^{-1}AC$, ovvero B rappresenta l'endomorfismo $f(x) = Ax$ (la cui matrice rappresentativa rispetto alla base standard è ovviamente A) nella base $\mathcal{C} = \{C^1, \ldots, C^n\}$ data dalle colonne di C. Il viceversa è ovvio perchè il cambio di base è una matrice C che coniuga due matrici rappresentative di uno stesso endomorfismo f (osservate infatti che tutto questo discorso vale per uno spazio vettoriale V qualunque). Il seguente diagramma commutativo dovrebbe chiarire tutti i dubbi

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"] \\
V \arrow[r, "f"] & V \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "B"] \arrow[u, "\phi_{\mathcal{B}'}"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "\phi_{\mathcal{B}'}"']
\end{tikzcd}$$

Basta prendere come matrice C che coniuga A e B il cambiamento di base $\phi_{\mathcal{B}}^{-1}\phi_{\mathcal{B}'}$.