Corso di Geometria - CdL triennale in Ingegneria
a.a. 2018-19

C. Liverani, J. Garofali

Tutorato del 25/03/19

1 Sistemi lineari e applicazioni lineari

1. Risolvere i seguenti sistemi lineari.

$$i)\ \begin{cases} x-y+3z-2w=4 \\ y+z=0 \\ x+z-w=0 \end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+2z=1 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

$$iii)\ \begin{cases} x+2y-z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases} \qquad iv)\ \begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x+2z=-1 \\ x-y+2z=-4 \\ 2y+z=0 \end{cases}$$

2. Risolvere il seguente sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 5 incognite. Verificare che l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale, calcolarne la dimensione e descriverlo come "span" di una sua base.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_4+x_5=0 \\ x_1+x_3+x_4-x_5=0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$$

3. Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni del seguente sistema lineare e calcolare tutte le soluzioni per $k = 2, 3$.

$$\begin{cases} x_1+kx_2+x_3=k \\ x_1-x_2-kx_3=1 \\ x_1+x_2-x_3=k-1 \end{cases}$$

4. Si considerino le seguenti applicazioni lineari:
$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2, 0)$ e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,
$G(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_3, -x_2, 2x_1 - x_2 + x_3)$.

i) Si esibisca una base di $\ker(F)$, il nucleo di F, e si calcoli la sua dimensione;

ii) Si esibisca una base di $\mathcal{R}(F)$, l'immagine di F, e si calcoli la sua dimensione;

iii) Si ripetano i punti $i) - ii)$ per G;

iv) Determinare se sono ben definite le composizioni $F \circ G$ e $G \circ F$ e in caso affermativo scrivere la matrice che rappresenta l'applicazione lineare ottenuta per composizione.

5. Si considerino i vettori $v_i \in \mathbb{R}^4,\ i = 1, \ldots, 4$ dati da

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i) Determinare se essi formano una base di $\mathbb{R}^4$;

ii) Se possibile, esprimere v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.

6. Sia $\mathbb{R}[x]_2$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2.

i) Verificare che $\mathbb{R}[x]_2$ è uno spazio vettoriale.

ii) Si consideri i seguenti vettori $v_i \in \mathbb{R}[x]_2$: $\mathbf{v_1} = \mathbf{1}, \mathbf{v_2} = \mathbf{x}, \mathbf{v_3} = \mathbf{x^2}$. Verificare che essi formano una base di $\mathbb{R}[x]_2$.

iii) Quale è la dimensione di $\mathbb{R}[x]_2$?

iv) Scrivere le coordinate del vettore $\mathbf{p(x)} = \mathbf{(1-x)^2 - 2(1+x)} \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]_\mathbf{2}$ nella base data in $ii)$.