Corso di Geometria - CdL triennale in Ingegneria a.a. 2018-19

C. Liverani, J. Garofali

Tutorato del 25/03/19

1 Sistemi lineari e applicazioni lineari

1. Risolvere i seguenti sistemi lineari.

$$i)\ \begin{cases} x-y+3z-2w=4 \\ y+z=0 \\ x+z-w=0 \end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+2z=1 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

$$iii)\ \begin{cases} x+2y-z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases} \qquad iv)\ \begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x+2z=-1 \\ x-y+2z=-4 \\ 2y+z=0 \end{cases}$$

Soluzione.

i) Applichiamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss alla matrice completa associata al sistema (dove riportiamo affianco le operazioni elementari sulle righe svolte)

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad R_3 \to R_3 - R_1$$
$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \quad R_3 \to R_3 - R_2$$
$$A'' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Notiamo che la matrice ottenuta risulta triangolare superiore, dunque l'algoritmo di Gauss è terminato. Concludiamo che il rango della

matrice è 3, poichè abbiamo 3 righe non nulle. A questo punto il numero di parametri liberi del sistema (numero di incognite - rk) è 1. Poniamo quindi $w = t \in \mathbb{R}$. Dalla terza equazione ricaviamo dunque $z = \frac{t}{3} + \frac{4}{3}$. Sostituendo z nella seconda equazione si trova $y = -\frac{t}{3} - \frac{4}{3}$ e infine sostituendo y e z nella prima equazione si trova $x = y - 3z + 2w + 4 = \frac{2}{3}w - \frac{4}{3}$.
L'insieme delle soluzioni (che non è evidentemente uno spazio vettoriale) è dunque
$S = \{(\frac{2}{3}t - \frac{4}{3}, -\frac{t}{3} - \frac{4}{3}, \frac{t}{3} + \frac{4}{3}, t) : t \in \mathbb{R}\}$.
Osserviamo che, equivalentemente, avremmo potuto porre $w = 3t$, così da evitare alcune frazioni: infatti con questa parametrizzazione l'insieme delle soluzioni si scrive

$$S = \{(2t-\frac{4}{3}, -t-\frac{4}{3}, t+\frac{4}{3}, 3t) : t \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

ii) Applichiamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss alla matrice completa associata al sistema (dove riportiamo affianco le operazioni elementari sulle righe svolte)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad R_3 \to R_3 - R_1$$
$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

La matrice è ora in forma triangolare superiore. Siccome il rango è 3 (=numero di righe non nulle) e 3 è anche il numero di incognite, concludiamo che esiste un'unica soluzione, che si calcola sostituendo a ritroso.
$z = -1,\ y + 2z = 1 \to y = 3,\ x + 2y - z = 1 \to x = -6$. Dunque la soluzione è data dal vettore di coordinate $(-6, 3, -1)$.

iii) Notiamo che il sistema lineare è omogeneo (e dunque la soluzione sarà un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$). Applichiamo l'algoritmo di Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_2 + R_1$$
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Il numero di parametri liberi (numero di incognite - rk) è dunque 1. Ponendo ad esempio $z = t$ (attenzione! La scelta di y come parametro libero non ha senso, poiché dalla seconda equazione otteniamo $y = 0$)

otteniamo dalla prima equazione $x = z = t$. Le soluzioni del sistema sono date da $S = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\} = span_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

iv) Per risolvere il sistema applichiamo l'algoritmo di Gauss alla matrice completa (dove però ammettiamo come operazione sulle righe anche la moltiplicazione per uno scalare non nullo).

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_2 \to 2R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to 2R_3 - R_1 \end{array}$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -11 \\ 0 & -3 & 4 & -11 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to 3R_4 + 2R_2 \end{array}$$

$$A'' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -22 \end{array}\right) \quad R_3 \leftrightarrow R_4$$

Dopo l'ultima operazione di scambio la matrice risulta essere triangolare superiore, dunque il rango della matrice è 3 (numero di righe non nulle) e il sistema ammette un'unica soluzione (poiché 3 è anche il numero di incognite). Troviamo infatti che $z = -2$, $-3y + 4z = -11 \to y = 1$, $2x + y = 3 \to x = 1$. Dunque $S = (1, 1, -2)$.

2. Risolvere il seguente sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 5 incognite. Verificare che l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale, calcolarne la dimensione e descriverlo come "span" di una sua base.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Con l'algoritmo di Gauss si trova

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_2 - R_1$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 + R_2$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si vede quindi che il rango della matrice è massimale, cioè $rk(A) = 3$, quindi il numero di parametri liberi è $5-3=2$. Per semplicità (si evitano frazioni inutili!) poniamo $x_3 = t, x_4 = s$ e risolviamo rispetto a x_1, x_2, x_5. L'ultima equazione ci dà $x_5 = 2x_3 + x_4 = 2t + s$. Dalla seconda troviamo $x_2 = x_3 - 2x_5 = t - 2(2t+s) = -3t - 2s$. Infine dalla prima $x_1 = -x_2 - x_4 - x_5 = 3t + 2s - s - (2t+s) = t$.
La soluzione cercata è dunque $S = \{(t, -3t-2s, t, s, 2t+s) : t, s \in \mathbb{R}\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\} = span_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Notiamo che S è uno spazio vettoriale di dimensione 2.

3. Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni del seguente sistema lineare e calcolare tutte le soluzioni per $k = 2, 3$.

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = k \\ x_1 - x_2 - kx_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = k - 1 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa del sistema $\grave{}$data da

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k \\ 1 & -1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -1 & k-1 \end{array} \right)$$

Poiché l'elemento a_{11} della matrice dei coefficienti non dipende da k ed è non nullo, possiamo usarlo come *pivot* per fare la riduzione con il metodo di Gauss.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k \\ 1 & -1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -1 & k-1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array}$$

$$(A'|b') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k \\ 0 & -(k+1) & -(k+1) & 1-k \\ 0 & 1-k & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Osserviamo che per procedere con l'algoritmo di Gauss dobbiamo assicurarci che l'elemento daa utilizzare come *pivot* sia non nullo: imponiamo quindi la condizione $k \neq -1$ e procediamo con l'operazione
"$R_3 \to R_3 + \left(\frac{1-k}{1+k}\right) R_2$" così da ottenere

$$(A''|b'') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k \\ 0 & -(k+1) & -(k+1) & 1-k \\ 0 & 0 & k-3 & \frac{k^2-3k}{k+1} \end{array} \right)$$

Osserviamo che per $k \neq 3$ esiste un'unica soluzione in quanto il rango della matrice dei coefficienti è 3 (quindi, necessariamente, uguale al rango della matrice completa). Analizziamo ora i casi rimasti, ovvero $k = 1$ e $k = 3$. Sostituendo $k = -1$ in $(A'|b')$ si trova

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Il sistema risulta quindi incompatibile $(2 = rk(A') < rk(A'|b') = 3$.
Infine sostituendo $k = 3$ in $(A''|b'')$ si trova:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il sistema risulta quindi compatibile e ammette $3-2 = 1$ parametro libero. Per calcolare la soluzione poniamo $z = t$, da cui segue $-4y - 4t = -2 \to y = -t + \frac{1}{2}$ e $x + 3(-t + \frac{1}{2}) + t = 3 \to x = 2t + \frac{3}{2}$. Dunque per $k = 3$ si ha $S = \{(2t + \frac{3}{2}, -t + \frac{1}{2}, t) : t \in \mathbb{R}\}$.
Per $k = 2$ (come osservato precedentemente) il sistema ammette un'unica soluzione, che si calcola agilmente sostituendo $k = 2$ in $(A''|b'')$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Quindi sostituendo a ritroso troviamo $S = (2, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Per concludere quindi abbiamo $\begin{cases} 0 \text{ soluzioni,} & \text{se } k = -1 \\ \infty^1 \text{ soluzioni,} & \text{se } k = 3 \\ 1 \text{ soluzione,} & \text{se } k \neq 3, -1. \end{cases}$

4. Si considerino le seguenti applicazioni lineari:
$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2, 0)$ e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,
$G(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_3, -x_2, 2x_1 - x_2 + x_3)$.

   i) Si esibisca una base di $\ker(F)$, il nucleo di F, e si calcoli la sua dimensione;

   ii) Si esibisca una base di $\mathcal{R}(F)$, l'immagine di F, e si calcoli la sua dimensione;

   iii) Si ripetano i punti $i) - ii)$ per G;

   iv) Determinare se sono ben definite le composizioni $F \circ G$ e $G \circ F$ e in caso affermativo scrivere la matrice che rappresenta l'applicazione lineare ottenuta per composizione.

Soluzione.

i) La matrice che rappresenta F (nella base standard di $\mathbb{R}^3$) è $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Per calcolare il nucleo dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato e poiché la matrice è gia in forma triangolare superiore si vede subito che z è un parametro libero, $y = 0$ e $x = y = 0$. Ovvero si ha $\ker(F) = \{(0,0,t) : t \in \mathbb{R}\} = span_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Concludiamo che una base di $\ker(F)$ è data dal vettore $\mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e dunque ha dimensione 1.

ii) Ricordiamo che il *Range* o *Immagine* di un'applicazione lineare, è lo spazio vettoriale generato dalle colonne della sua matrice rappresentativa.

In questo caso si ha $R(F) = span_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Per "motivi di dimensione", i due vettori sono necessariamente una base del *Range* di F. Per verificare che sono effettivamente linearmente indipendenti possiamo procedere applicando l'algoritmo di Gauss **sulle colonne** alla matrice rappresentativa. Tramite l'operazione semplice sulle colonne "$C_2 \to C_2 + C_1$" troviamo subito che $R(F) = span_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Concludiamo quindi che l'immagine ha dimensione 2 e una sua base è l'insieme $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$.

iii) La matrice associata a G nelle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ è $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Per risolvere il sistema omogeneo associato (e dunque calcolare il nucleo di G) procediamo con l'algoritmo di Gauss (dove ammettiamo la moltiplicazione per uno scalare non nullo)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \to 2R_2 - R_1 \\ \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{array}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 + R_2$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_4 \to 2R_4 - R_3$$

Il rango dell'applicazione lineare è massimale, cioè $rk(A) = 3$, come si vede dopo aver eliminato l'ultima riga. Quindi l'unica soluzione è quella banale, ovvero $(0,0,0)$ e dunque il nucleo è composto dal solo vettore nullo, *i.e.* $\ker(G) = \mathbf{0}$.
Come prima, il *Range* si calcola come span delle colonne di A. di nuovo per ragioni dimensionali, i vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono indipendenti e dunque formano una bese di $R(G)$ (verificarlo procedendo con l'algoritmo di Gauss sulle colonne o, il che è la stessa cosa, con l'algoritmo di Gauss su A^t).

iv) Ovviamente la composizione $F \circ G$ non è ben definita perché il dominio di F non coincide con il codominio di G, mentre è ben definita $G \circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. La matrice che la rappresenta è data dal prodotto delle rispettivi matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Si considerino i vettori $v_i \in \mathbb{R}^4,\ i = 1, \ldots, 4$ dati da

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i) Determinare se essi formano una base di $\mathbb{R}^4$;

ii) Se possibile, esprimere v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.

Soluzione.

i) Poichè abbiamo 4 vettori in $\mathbb{R}^4$, essi formano una base se e solo se sono linearmente indipendenti. Per determinarlo procediamo applicando l'algoritmo di Gauss alla matrice ottenuta mettendo i vettori v_i in riga.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_4 \to R_4 - R_1$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_4 \to R_4 + R_2 \end{array}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad R_4 \to R_4 - 2R_3$$

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè il rango della matrice è 3 concludiamo che i vettori non sono linearmente indipendenti: infatti l'ultima riga di zeri riflette il fatto che l'ultimo riga (poiché non sono stati operati scambi) è combinazione lineare delle altre righe. Dunque i vettori dati non formano una base.

ii) Stiamo cercando tre numeri, non tutti nulli, diciamo $x, y, z \in \mathbb{R}$ tali che $v_4 = xv_1 + yv_2 + zv_3$.
Scritto in forma vettoriale l'equazione diventa

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ciò equivale a dire

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ovvero basta risolvere il precedente sistema lineare! Lo studente può verificare che l'unica soluzione del sistema è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
In alternativa avremmo potuto procedere a ritroso con le operazione effettuate sulle righe (che sono proprio i v_i) al punto i).
Al primo passo abbiamo posto $R_1' = R_1, R_2' = R_2, R_3' = R_3, R_4' = R_4 - R_1$, al secondo passo $R_1'' = R_1', R_2'' = R_2', R_3'' = R_3' + R_2', R_4'' = R_4' + R_2'$ e infine, all'ultimo passo, l'unica operazione non banale è stata $R_4''' = R_4'' - 2R_3''$. Pochè $R_4''' = \mathbf{0}$ è una riga nulla, otteniamo l'equazione $R_4'' - 2R_3'' = \mathbf{0}$, ovvero (sostituendo) $(R_4' + R_2') - 2(R_3' + R_2') = \mathbf{0}$, ovvero $R_4 - R_1 + R_2 - 2R_3 - 2R_2 = \mathbf{0}$, da cui si ricava facilmente $R_4 = R_1 + R_2 + 2R_3$, cioè per l'appunto $v_4 = v_1 + v_2 + 2v_3$.

6. Sia $\mathbb{R}[x]_2$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2.

   i) Verificare che $\mathbb{R}[x]_2$ è uno spazio vettoriale.
   ii) Si consideri i seguenti vettori $v_i \in \mathbb{R}[x]_2$: $\mathbf{v_1} = \mathbf{1}, \mathbf{v_2} = \mathbf{x}, \mathbf{v_3} = \mathbf{x^2}$. Verificare che essi formano una base di $\mathbb{R}[x]_2$.
   iii) Quale è la dimensione di $\mathbb{R}[x]_2$?
   iv) Scrivere le coordinate del vettore $\mathbf{p(x)} = \mathbf{(1-x)^2 - 2(1+x)} \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]_\mathbf{2}$ nella base data in *ii*).

   Soluzione.

   (a) È facile verificare che l'operazione naturale di somma tra due polinomi $p(x), q(x)$ data da $p(x) + q(x)$ è ben definita ed è commutativa e associativa. Il suo elemento neutro è il polinomio identicamente nullo e l'inverso di $p(x)$ è dato da $-p(x)$. Si vede subito poi che la moltiplicazione per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ data da $\lambda p(x)$ è distributiva rispetto la somma.
   Questo dimostra che lo spazio dei polinomi a coefficienti reali è uno spazio vettoriale reale. Per concludere che $\mathbb{R}[x]_2$ è uno spazio vettoriale osserviamo che esso è chiuso rispetto a tutte queste operazioni (addizione, elemento neutro, moltiplicazione per uno scalare).
   (b) Anche questo fatto è abbastanza ovvio. Per definizione gli elementi v_1, v_2, v_3 generano $\mathbb{R}[x]_2$, in quanto un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]_2$ si scrive come $p(x) = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2$, per certi $a, b, c \in \mathbb{R}$ (unici). Per verificare che essi sono linearmente indipendenti bisogna verificare che se $a + bx + cx^2 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, allora $a = b = c = 0$. Per esempio si può procedere valutando il polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ in $x = 0, 1, -1$, così da ottenere un sistema lineare la cui unica soluzione è per l'appunto $a = b = c = 0$.
   (c) Poichè dal punto precedente l'insieme $\{1, x, x^2\}$ è una base, concludiamo che $\mathbb{R}[x]_2$ ha dimensione 3.

(d) Abbiamo $p(x) = x^2 - 4x - 1$, dunque le sue coordinate rispetto alla base scelta sono $(-1, -4, 1)$.